æ

La fase di Berry

Introduzione. Prendiamo una matita e appoggiamola sul polo nord di un globo puntandola nella direzione di un meridiano. Facciamo scorrere la matita lungo questo meridiano fino all' equatore e, tenendola sempre perpendicolare a quest' ultimo, portiamola su un altro meridiano. Se ora la riportiamo al polo nord lungo quest' altro meridiano ci si accorge come, sebbene sia tornata al polo nord, essa non punta più nella direzione del primo meridiano.

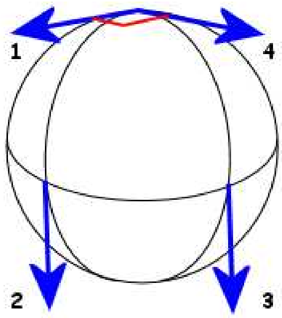

Fig. 1

Questo esercizio mostra come il trasporto parallelo di un vettore lungo una curva chiusa di una superficie curva genera una anolomia ossia alcune variabili che descrivono il sistema non tornano al loro valore iniziale. Nel 1983 M. Berry scoprì che un effetto geometrico analogo si presentava nelle onde quantistiche che descrivono la materia. In questo caso l' anolomia si presenta nella fase delle funzioni d' onda dopo che il sistema è stato traslato lungo una curva chiusa nel così detto "spazio dei parametri"; a tale anolomia fù dato il nome di fase geometrica.

La fase geometrica nelle trasformazioni adiabatiche. Consideriamo un sistema quantistico descritto da una hamiltoniana $\hat{H}$ e sia il sistema posto in uno stato stazionario. Su di uno stato del genere misure forniscono in qualunque istante lo stesso risultato eccetto che per variazioni di fase derivanti dalla fase dinamica $e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$ ove E_n è l' autovalore della hamiltoniana nello stato stazionario. Siccome la fase dinamica non ha alcun effetto sul valore dell' energia o sull' estenzione spaziale della funzione d' onda essa non influisce su un sistema che si trovi in uno stato stazionario. Se il sistema viene lentamente alterato ossia se la hamiltoniana ha una dipendenza da alcuni parametri esterni e se tali parametri vengono fatti lentamente variare allora esiste un teorema detto teorema adiabatico* che afferma che se il sistema è al tempo t_i in un autostato $\psi_n(x, t_i)$ allora in tempi successivi esso si troverà nell' autostato $\psi_n(x, t)$ autofunzione istantanea della hamiltoniana $\hat{H}(t)$ di autovalore $E_n(t)$ ma con fattore di fase dinamica

$$\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t} d\tau\, E_n(\tau)\right\}.$$

*Vedi Messian pag. 739 e seguenti.

In particolare, se la hamiltoniana è costretta a tornate a $\hat{H}(t_i)$ dopo un ciclo adiabatico il sistema tornerà nell' autostato iniziale $\psi_n(x, t_i)$ a meno di un fattore di fase. Tale fattore di fase è un osservabile che può essere misurato per esempio separando il sistema in due parti, facendo compiere la trasformazione ciclica adiabatica a uno dei due sistemi e misurando poi l' interferenza tra i due sistemi una volta che essi vengano ricombinati.

Ciò che si vuole ora dimostrare è che dopo un ciclo adiabatico oltre al fattore di fase dinamico

$$\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\oint dt\, E_n(t)\right\}$$

venga ad apparire un fattore di fase dipendente dal circuito compiuto nello spazio dei parametri

$$\exp\{i\gamma_n\}$$

detta per l' appunto fase geometrica o di Berry. Allora mentre l' usuale fase risponde alla domanda: "Quanto tempo ha impiegato il sistema a compiere il ciclo? " la fase geometrica risponde alla domanda: "Quale traiettoria ha seguito il sistema nello spazio dei parametri? " In questo senso la fase geometrica costituisce una sorta di memoria del sistema in quanto contiene informazioni sugli ambienti predecenti del sistema. Vediamo dunque come ricavare questa fase.

Formula generale per il fattore di fase. * Sia fatta variare la hamiltoniana $\hat{H}$ di un sistema agendo su dei parametri $\vec{R}(t) = (X(t), Y(t), \ldots)$ da cui essa dipenda. La variazione della hamiltoniana dal tempo $t = 0$ a $t = T$ in cui essa ritorna tale che $\hat{H}(T) = \hat{H}(0)$ può essere visulizzata come la traslazione di $\hat{H}$ lungo una curva chiusa $\vec{R}(t)$ nello spazio dei parametri con la condizione che $\vec{R}(T) = \vec{R}(0)$. Tale curva chiusa sarà detta circuito e denotata dalla lettera C. Lo stato $|\psi(t)\rangle$ del sistema evolverà secondo l' equazione di Schrödinger

$$\hat{H}\big(\vec{R}(t)\big)|\psi(t)\rangle = i\hbar|\dot{\psi(t)}\rangle.$$

In ogni istante esisterà una base assunta discreta di autostati $|n(\vec{R})\rangle$ di $\hat{H}(\vec{R})$ con $\vec{R} = \vec{R}(t)$ tale che

$$\hat{H}(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle = E_n(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle$$

con $E_n(\vec{R})$ l' energia dell' n-esimo autostato al tempo t. Tale equazione agli autovalori implica che non esiste** alcuna relazione tra le fasi relative degli autostati $|n(\vec{R})\rangle$ a tempi differenti per cui, per i nostri scopi, può essere scelta per la $|\psi(t)\rangle$ una qualsiasi fase a patto che $|n(\vec{R})\rangle$ risulti una funzione monodroma in un dominio dello spazio delle fasi che contenga C. Scriviamo la $|\psi(t)\rangle$ come***

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\, E_n\big(\vec{R}(t')\big)\right\}\exp\{i\gamma_n\}|n\big(\vec{R}(t)\big)\rangle.$$

*Ma quale è stato l' idea brillante di Berry: l' aver messo l' $e^{i\gamma_n}$ oppure l' essersi accorto che esso è un osservabile o che altro ?

**E questo perchè ?

***Ma se $|\psi(0)\rangle = \sum c_n|n\big(\vec{R}(0)\big)\rangle$ allora in questa formula al posto di $|n\big(\vec{R}(t)\big)\rangle$, che vale solo se lo stato iniziale è preparato in $|n\big(\vec{R}(0)\big)\rangle$, non ci dovrebbe essere $\sum c_n|n\big(\vec{R}(t)\big)\rangle$?

Il primo termine è l' usuale fattore di fase dinamica mentre è il secondo termine quello che più ci interessa.

Il fatto cruciale è che $\gamma_n(t)$ non è integrabile e non può dunque essere scritto come una funzione di $\vec{R}(t)$ e inoltre non è a un sol valore in quanto $\gamma_n(T)-\gamma_n(0)\neq 0$ nonostante che $\vec{R}(T)-\vec{R}(0)=0$. La $\gamma_n(t)$ si ricava imponendo che la $|\psi(t)\rangle$ soddisfi l' equazione di Schrödinger; sostituendo infatti

$$\hat{H}\big(\vec{R}(t)\big)|n\big(\vec{R}(t)\big)\rangle \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\,E_n\big(\vec{R}(t')\big\}\,e^{i\gamma_n(t)} = i\hbar\left(-\frac{i}{\hbar}E_n\big(\vec{R}(t)\big)+i\dot{\gamma}_n(t)\right)|\psi(t)\rangle+$$
$$+i\hbar\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\,E_n\big(\vec{R}(t)\big)\right\}e^{i\gamma_n(t)}|\nabla_{\vec{R}}n\big(\vec{R}(t)\big)\rangle\cdot\dot{\vec{R}}(t)$$

e quindi

$$\dot{\gamma}_n(t)|\psi(t)\rangle = \dot{\gamma}_n(t)\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\,E_n\big(\vec{R}(t)\big)\right\}e^{i\gamma_n(t)}|n\big(\vec{R}(t)\big)\rangle =$$
$$= i\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\,E_n\big(\vec{R}(t')\big)\right\}e^{i\gamma_n(t)}|\nabla_{\vec{R}}n\big(\vec{R}(t)\big)\rangle\cdot\dot{\vec{R}}(t)$$

e moltiplicando da sinistra per $\langle\psi(t)|$ si ha che gli esponenziali si elidono ed essendo

$$\langle n\big(\vec{R}(t)\big)|n\big(\vec{R}(t)\big)\rangle = 1$$

si ha che

$$\dot{\gamma}_n(t) = i\langle n\big(\vec{R}(t)\big)|\nabla_{\vec{R}}n\big(\vec{R}(t)\big)\rangle\cdot\dot{\vec{R}}(t).$$

Se si fa compiere ai parametri un ciclo completo di periodo T lungo il circuito C allora si ha che

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\,E_n\big(\vec{R}(t)\big)\right\}\exp\{i\gamma_n(C)\}|\psi(0)\rangle$$

ove la fase geometrica risulta

$$\gamma_n(C) = i\int_0^T dt\,\dot{\vec{R}}(t)\cdot\langle n\big(\vec{R}(t)\big)|\nabla_{\vec{R}}n\big(\vec{R}(t)\big)\rangle = i\oint_C\langle n(\vec{R})|\nabla_{\vec{R}}n(\vec{R})\rangle\cdot d\vec{R}$$

che è anche detta fase di Berry*. Quindi $\gamma_n(C)$ è data da un integrale di linea nello spazio dei parametri e la normalizzazione di $|n\rangle$ implica** che $\langle n|\nabla n\rangle$ sia immaginario così da garantire che γ_n sia reale. Ora il calcolo esplicito di $|\nabla_{\vec{R}}n\rangle$ implica il dover trovare una base locale di $|n\rangle$ che può essere un compito arduo. Tale difficoltà può essere superata trasformando l' integale di linea in uno di superficie su di una superficie S il cui bordo sia C. Per ora, per utilizzare l' usuale

*Essendo $\langle n|\nabla n\rangle$ immaginario puro allora $i\oint\langle n|\nabla n\rangle\cdot d\vec{R} = -\,\mathrm{Im}\oint\langle n|\nabla n\rangle\cdot d\vec{R}$.

**Io questo implica non lo vedo ?

calcolo vettoriale, supponiamo che lo spazio dei parametri sia tridimensionale così che, dal teorema di Stocks

$$\gamma_n(C) = -\,\mathrm{Im} \iint_S d\vec{S} \cdot \nabla_{\vec{R}} \times \langle n|\nabla_{\vec{R}} n\rangle$$

---

vedi un po' se è giusto questo pezzo
osserviamo che i vettori $\nabla_{\vec{R}}$ e $|n\rangle$ vivono in due spazi diversi, $\nabla_{\vec{R}}$ vive nello spazio dei parametri supposto tridimensionale, $|n\rangle$ vive nello spazio di Hilbert del sistema, per cui, per il $\nabla_{\vec{R}}$ il $|n\rangle$ non è un vettore ma si comporta come uno scalare (anche se a più componenti) allora
$[\nabla \times \langle n|\nabla n\rangle]_i = \epsilon_{ijk}\nabla^j(n\nabla^k n) = \epsilon_{ijk}\nabla^j n\nabla^k n + \epsilon_{ijk} n\nabla^j\nabla^k n$
ma per l' antisimmetria di ϵ_{ijk} l' ultimo termine è nullo e allora

$$\nabla \times \langle n|\nabla n\rangle = \langle \nabla n| \times |\nabla n\rangle$$

che è un vettore tridimensionale essendo l' indice i l' indice anche del vettore di superficie dello spazio dei parametri $d\vec{S}$.

---

allora si può scrivere

$$\gamma_n(C) = -\,\mathrm{Im} \iint_S d\vec{S} \cdot \langle \nabla n| \times |\nabla n\rangle = -\,\mathrm{Im} \iint_S d\vec{S} \cdot \sum_{m\neq n} \langle \nabla n|m\rangle \times \langle m|\nabla n\rangle$$

dove l' elemento diagonale è stato tolto dovendo essere $\langle \nabla n| \times |\nabla n\rangle$ immaginario puro. Ora $\langle m|\nabla n\rangle$ può essere ricavato dall' equazione agli autovalori $\hat{H}(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle = E_n(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle$ infatti nablando

$$\nabla\hat{H}(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle + \hat{H}(\vec{R})|\nabla n(\vec{R})\rangle = \nabla E_n(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle + E_n(\vec{R})|\nabla n(\vec{R})\rangle$$

e moltiplicando da sinistra per $\langle m(\vec{R})|$, $m \neq n$

$$\langle m|\nabla\hat{H}|n\rangle + E_m\langle m|\nabla n\rangle = \nabla E_n \underbrace{\langle m|n\rangle}_{=0} + E_n\langle m|\nabla n\rangle \qquad \text{e quindi}$$

$$\langle m|\nabla n\rangle = \frac{\langle m|\nabla\hat{H}|n\rangle}{E_n - E_m}, \quad m \neq n$$

per cui $\gamma_n(C)$ può essere scritta come

$$\gamma_n(C) = -\iint_S d\vec{S} \cdot \vec{V}_n(\vec{R})$$

con

$$\vec{V}_n(\vec{R}) = \mathrm{Im} \sum_{m\neq n} \frac{\langle n|\nabla\hat{H}|m\rangle \times \langle m|\nabla\hat{H}|n\rangle}{(E_m - E_n)^2}.$$

Come si vede siamo riusciti a eliminare la dipendanza della fase da $|\nabla n\rangle$; tale dipendenza poteva far credere che il valore di $\gamma_n(C)$ dipendesse dalla scelta delle fasi relative a autostati con parametri differenti. Infatti mentre $\langle n|\nabla n\rangle$ certamente dipende dalla scelta delle fasi degli autostati il suo rotore, da cui $\vec{V}_n$ dipende, non varia al variare delle fasi relative. Infatti se si fà la trasformazione

$$|n\rangle \longrightarrow |n'\rangle = e^{i\mu(\vec{R})}|n\rangle$$

allora

$$\langle n|\nabla n\rangle \longrightarrow \langle n|\nabla n\rangle + i\nabla\mu$$

per cui mentre $\langle n|\nabla n\rangle$ varia il suo rotore no in quanto il rotore di un gradiente è nullo. Ciò è anche una riprova del fatto che $\gamma_n(C)$ è un osservabile infatti la quantità $\vec{V}_n$ è analoga ad un campo magnetico di potenziale vettore $\mathrm{Im}\,\langle n|\nabla n\rangle$ e la trasformazione sopra può essere vista come una trasformazione di gauge su tale potenziale mentre ovviamente il "campo magnetico" $\vec{V}_n$ e le quantità osservabili da esso derivanti non possono dipendere dalla scelta di tale gauge.

Osserviamo per ora superficialmente che la presenza di degenerazioni negli stati implica un infinito in $\vec{V}_n$ che può essere visualizzato come la presenza di una sorgente di campo. La fase di Berry risulta il flusso associato a tali sorgenti.

Vediamo, prima di approfondire il discorso sulla degenerazione, di generalizzare la fase di Berry a uno spazio dei parametri di dimensione più grande di tre. Per fare ciò consideriamo l' anolomia derivante dal trasporto parallelo di un vettore in un caso classico che però ci permetterà una immediata generalizzazione al caso quantistico. Consideriamo dunque il trasporto parallelo di un vettore sulla superficie di una sfera di raggio unitario. Sia $\vec{r}$ il vettore radiale e sia $\vec{e}$ un vettore tangente alla sfera nel punto determinato da $\vec{r}$. Ciò che si vuole fare è trasportare parallelamente $\vec{e}(\vec{r})$ facendo variare $\vec{r}$ in un circuito chiuso e valutare poi la variazione di $\vec{e}$ una volta che $\vec{r}$ abbia compiuto il circuito. La condizione di trasporto parallelo di $\vec{e}$ implica che esso resti ortogonale a $\vec{r}$ ossia

$$\vec{e}\cdot\vec{r} = 0$$

e inoltre, detto con $\vec{e}'$ il vettore tale che $\vec{e}' = \vec{r}\times\vec{e}$ di modo che $\vec{r}$, $\vec{e}$ e $\vec{e}'$ formino un sistema ortogonale di assi cartesiani, deve accadere che tale sistema segua puntualmente $\vec{r}$ e dunque non esista torsione tra il sistema e $\vec{r}$ ossia

$$\vec{\Omega}\cdot\vec{r} = 0$$

con $\vec{\Omega}$ la velocità angolare del sistema d' assi. La variazione di $\vec{e}$ risulta ovviamente data da

$$\dot{\vec{e}} = \vec{\Omega}\times\vec{e}$$

ove $\vec{\Omega}$ può essere in generale scritto come proiezione su tre vettori linearmente indipendenti quali $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$ e $\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$ e dunque come

$$\vec{\Omega} = a\vec{r} + b\dot{\vec{r}} + c\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$$

ma $\vec{\Omega}\cdot\vec{r} = 0$ allora $a = 0$ e inoltre la condizione di ortogonalità tra $\vec{e}$ e $\vec{r}$ implica che $\vec{e}$ non può avere componenti su $\vec{r}$ allora $b = 0$ perchè se $\vec{\Omega}$ avesse componenti su $\dot{\vec{r}}$ allora $\vec{e}$ si staccherebba da $\vec{r}$ lungo $\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$ acquistando una componente non nulla lungo $\vec{r}$. Infine deve essee che $c = 1$ perchè affinche $\vec{e}$ resti attaccato al punto individuato da $\vec{r}$ deve essere che $|\dot{\vec{r}}| = |\dot{\vec{e}}|$ ed essendo $\dot{\vec{e}} = \vec{\Omega}\cdot\vec{e} = c\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\times\vec{e}$ ed essendo $\vec{r}\perp\dot{\vec{r}}$ e $\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\perp\vec{e}$ allora $|\dot{\vec{e}}| = |\vec{r}|\,|\dot{\vec{r}}|\,|\vec{e}|c$ ma $|\vec{r}| = |\vec{e}| = 1$ per cui $|\dot{\vec{r}}| = c|\dot{\vec{e}}|$ da cui la tesi. Allora la condizione di trasporto parallelo per $\vec{e}$ è definita dalla legge

$$\dot{\vec{e}} = \vec{\Omega}\times\vec{e} \qquad \text{con } \vec{\Omega} = \vec{r}\times\dot{\vec{r}}$$

e, analogamente, la stessa legge vale ovviamente anche per il trasporto di $\vec{e}'$ ossia si ha che

$$\dot{\vec{e}}' = \vec{\Omega}\times\vec{e}' \qquad \text{con } \vec{\Omega} = \vec{r}\times\dot{\vec{r}}.$$

Tali leggi sono non integrabili in quanto che se $\vec{r}$ ritorna alla sua posizione originaria dopo un circuito C sulla sfera $\vec{e}$ non torna a puntare nella direzione iniziale ma risulta ruotata di un angolo $\alpha(C)$ che è l' anolomia che vogliamo ora determinare.

È ovvio che identificare $\vec{e}$ (e quindi $\vec{e}'$) equivale a definire il vettore unitario

$$\vec{\psi} = \frac{\vec{e} + i\vec{e}'}{\sqrt{2}}$$

vettore che vive nel piano ortogonale a $\vec{r}$ In termini di $\vec{\psi}$ la legge di trasporto parallelo prende la semplice forma

$$\mathrm{Im}\, \vec{\psi}^{\star} \cdot \dot{\vec{\psi}} = 0$$

o anche

$$\mathrm{Im}\, \vec{\psi}^{\star} \cdot d\vec{\psi} = 0$$

con $d\vec{\psi}$ la variazione di $\vec{\psi}$ associata a uno spostamento $d\vec{r}$. Infatti $\mathrm{Im}\, \vec{\psi}^{\star} \cdot \dot{\vec{\psi}} = \frac{1}{2}(\vec{e} \cdot \dot{\vec{e}}' - \vec{e}' \cdot \dot{\vec{e}}) = 0$ in quanto

$$\begin{aligned} \vec{e} \cdot \dot{\vec{e}}' &= \vec{e} \cdot \left[(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{e}' \right] = e_\ell \epsilon_{ijk} r_j \dot{r}_k \epsilon_{\ell i m} e'_m = e_\ell (\delta_{\ell j}\delta_{mk} - \delta_{\ell k}\delta_{mj}) r_j \dot{r}_k e'_m = e_\ell r_\ell \dot{r}_k e'_k - e_\ell \dot{r}_\ell r_j e'_j = \\ &= (\vec{e} \cdot \vec{r})(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{e}') - (\vec{e} \cdot \dot{\vec{r}})(\vec{r} \cdot \vec{e}') = 0 \end{aligned}$$

e analogamente anche $\vec{e}' \cdot \dot{\vec{e}} = 0$ e ciò è ovvio in quanto la variazione di $\vec{e}$ vive nel piano $\vec{e}\vec{r}$ mentre quando si fà variare $\vec{e}'$ la sua variazione vive solo nel piano $\vec{e}'\vec{r}$.

Per trovare $\alpha(C)$ utilizziamo una parametrizzazione delle sfera relativa a una base locale di vettori unitari $\vec{u}$ e $\vec{v}$ per esempio si potrebbe utilizzare come carta i paralleli di latitudine θ e i meridiani di longitudine ϕ nei punti

$$\vec{r} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

parametrizzazione di vettori tangenti

$$\vec{u} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0), \quad \vec{v} = (-\cos\theta\cos\phi, -\cos\theta\sin\phi, \sin\theta).$$

Specificare una tale base per i vettori della sfera equivale a specificare una base per la $\vec{\psi}$ della forma

$$\vec{n} = \frac{\vec{u} + i\vec{v}}{\sqrt{2}}$$

e rispetto a tale base la $\vec{\psi}$ è scrivibile come

$$\vec{\psi} = \vec{n} e^{-i\alpha}$$

con α l' angolo formato da $\vec{\psi}$ con $\vec{n}$ ossia l' angolo tra $\vec{e}$ e $\vec{u}$ uguale poi a quello tra $\vec{e}'$ e $\vec{v}$ a un dato istante iniziale. Ovviamente l' anolomia cercata è la somma su tutto il circuito delle variazioni di angolo $d\alpha$ ossia

$$\alpha(C) = \oint_C d\alpha$$

ma essendo $\mathrm{Im}\,\vec{\psi}^\star \cdot d\vec{\psi} = 0$ ed essendo $d\vec{\psi} = d\vec{n}e^{-i\alpha} - i\vec{n}e^{-i\alpha}d\alpha$ allora $\mathrm{Im}\,\vec{n}^\star \cdot d\vec{n} - \mathrm{Im}\,i\vec{n}^\star \cdot \vec{n}\,d\alpha = 0$ ed essendo $\vec{n}^\star \cdot \vec{n} = 1$

$$d\alpha = \mathrm{Im}\,\vec{n}^\star \cdot d\vec{n}$$

e quindi

$$\alpha(C) = \mathrm{Im} \oint_C \vec{n}^\star \cdot d\vec{n}.$$

Utilizzando ora il teorema di Stocks*

$$\alpha(C) = \mathrm{Im} \iint_S d\vec{n}^\star \times \cdot\, d\vec{n}$$

ove S è tale che $\partial S = C$.

Osserviamo che tale risultato, come il caso sopra illustrato, è indipendente dalla scelta della parametrizzazione infatti se da $\vec{u}$, $\vec{v}$ si passa ad un' altra base $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ questa induce in $\vec{n}$ una trasformazione di gauge della forma

$$\vec{n}(\vec{r}) \longrightarrow \vec{n}'(\vec{r}) = \vec{n}(\vec{r})e^{i\mu(\vec{r})}$$

ove $\mu(\vec{r})$ è punto per punto l' angolo tra $\vec{u}$ e $\vec{u}'$. Allora si vede* che $d\vec{n}'^\star \times \cdot\, d\vec{n}' \longrightarrow d\vec{n}^\star \times \cdot\, \vec{n}$.

In termini di parametri arbitrari X_1 e X_2 con cui venga parametrizzata la sfera la formula sopra può essere esplicitamente scritta come

$$\alpha(C) = \mathrm{Im} \iint_S dX_1 dX_2 \left(\frac{\partial \vec{n}^\star}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial X_2} - \frac{\partial \vec{n}^\star}{\partial X_2} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial X_1} \right)$$

e se in particolare si sceglie l' usuale parametrizzazione $X_1 = \theta$, $X_2 = \phi$ si ha che

$$\frac{\partial \vec{n}^{(\star)}}{\partial X_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial(\vec{u} \overset{+}{\underset{(-)}{}} i\vec{v})}{\partial \theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} \overset{+}{\underset{(-)}{}} i \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} \right) = \overset{+}{\underset{(-)}{}} \frac{1}{\sqrt{2}} i(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, -\cos\theta)$$

$$\frac{\partial \vec{n}^{(\star)}}{\partial X_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \phi} \overset{+}{\underset{(-)}{}} i \frac{\partial \vec{v}}{\partial \phi} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos\phi \overset{+}{\underset{(-)}{}} i\cos\theta\sin\phi, -\sin\phi \overset{-}{\underset{(+)}{}} i\cos\theta\cos\phi, 0)$$

e allora

$$\mathrm{Im}(\partial_1 \vec{n}^\star \cdot \partial_2 \vec{n}) = \frac{1}{2} \mathrm{Im}(-i\sin\theta\cos\theta, -i\sin\theta\sin\phi, i\cos\theta) \begin{pmatrix} -\cos\phi + i\cdots \\ -\sin\phi - i\cdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin\theta\cos^2\phi + \sin\theta\sin^2\phi = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\mathrm{Im}(\partial_2 \vec{n}^\star \cdot \partial_1 \vec{n}) = \frac{1}{2} \mathrm{Im}(-\cos\phi - i\cdots, -\sin\phi + i\cdots, 0) \begin{pmatrix} i\sin\theta\cos\phi \\ i\sin\theta\sin\phi \\ -\cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}(-\sin\theta\cos^2\phi - \sin\theta\sin^2\phi) = -\frac{1}{2}\sin\theta$$

---

*Teorema di Stocks ?! Mah, io credo solo di aver capito che il $\times$ è rispetto a d mentre $\cdot$ è rispetto a $\vec{n}$.

*E come in questo caso ?

e allora

$$\alpha(C) = \iint_S \sin\theta \, d\theta d\phi = \Omega(C)$$

dove $\Omega(C)$ è semplicemente l' angolo solido in radianti sotteso da C come visto dal centro della sfera. Se per esempio si fa compiere a $\vec{e}$ il circuito in figura 1 la superficie di questo spichio sferico è un ottavo della sfera e allora $\alpha(C) = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2} = 90°$.

Vediamo allora di generalizzare questo discorso alla meccanica quantisica. Sostituiamo nel discorso sopra al vettore $\vec{\psi}$ uno stato quantico $|\psi\rangle$ ossia un vettore unitario nello spazio di Hilbert n-dimensionale e sostituiamo alla posizione $\vec{r} = (X_1, X_2)$ sulla sfera la posizione $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots)$ in uno spazio dei parametri che governa il sistema fisico rappresentato da $|\psi\rangle$. Analogamente a sopra esiste una legge di trasporto parallelo che governa la fase di $|\psi\rangle$ che risulta essere

$$\mathrm{Im}\,\langle\psi|d\psi\rangle = 0$$

del tutto analoga a sopra a parte il significato da dare all' operatore d. Mentre sopra esso aveva in sostanza il significato di operatore differenziale ora, essendo lo spazio dei parametri maggiore di tre dobbiamo utilizzare la teoria delle forme differenziali in cui il posto del differenziale viene preso dalla derivata esterna ossia di quell' operatore d che trasforma p-forme (tensore di rango p totalmente antisimmetrico) in $p+1$-forme definito univocamente dalle seguenti proprietà

$$\begin{aligned}
&1) \quad d(\tilde{\beta}\tilde{\gamma}) = d\tilde{\beta} + d\tilde{\gamma} \\
&2) \quad d(\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}) = d\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} + (-1)^p \tilde{\alpha} \wedge d\tilde{\beta} \\
&3) \quad d(d\tilde{\alpha}) = 0 \\
&4) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i
\end{aligned}$$

e dove l' operatore $\wedge$ non è il prodotto vettoriale usuale ma è il cosi detto "wedge product" utilizzato per costruire 2-forme da 1-forme come

$$\tilde{p} \wedge \tilde{q} = \tilde{p} \otimes \tilde{q} - \tilde{q} \otimes \tilde{p} \quad [(\tilde{q} \otimes \tilde{p})_{ij} = q_i p_j].$$

Ritornando al trasporto parallelo, quando $\vec{X}$ compie un circuito C nello spazio dei parametri $|\psi\rangle$ torna in se stessa a meno di una fase $\gamma(C)$ tale che*

$$\langle\psi_{\text{iniz.}}|\psi_{\text{fin.}}\rangle = \exp\{i\gamma(C)\}.$$

Per trovare $\gamma(C)$ introduciamo una base locale $\forall\, X$ e relativi autostati $|n(\vec{X})\rangle$ tale che

$$|\psi\rangle = |n(\vec{X})\rangle \exp\{i\gamma\}.$$

Allora la $\gamma(C)$ è definita come la somma sulle infinitesime variazioni della γ da

*Qui il discorso è puramente matematico e non tiene conto della fase dinamica $e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\, E_n(t)}$.

$$\gamma(C)=\oint_C d\gamma = \text{essendo}\,\mathrm{Im}=0 = -\,\mathrm{Im}\oint_C \langle n|dn\rangle = \text{per Stocks generalizzato} =$$
$$= -\,\mathrm{Im}\iint_S d\langle n|dn\rangle = -\,\mathrm{Im}\iint_S (\langle dn|\wedge|dn\rangle + \underbrace{\langle n|ddn\rangle}_{=0}$$

e quindi

$$\gamma(C) = -\,\mathrm{Im}\iint_S \langle dn|\wedge|dn\rangle.$$

L' integrando $V=\mathrm{Im}\,\langle dn|\wedge|dn\rangle$ è una due forma di volume detta due forma di fase il cui flusso attraverso S da la fase geometrica. Anche V è ovviamente invariante sotto trasformazioni di fase della forma

$$|n(\vec{X})\rangle \longrightarrow |n'(\vec{X})\rangle = |n(\vec{X})\rangle e^{i\mu(\vec{X})}.$$

Per quanto riguarda la parte fisica del probrema essa si implementa facilmente utilizzando l' equazione di Schrödinger e il teorema adiabatico trovando che oltre alla fase geometrica esiste anche l' usuale fase dinamica

$$\gamma_d = -\frac{1}{\hbar}\int_0^T dt\, E_n\big(\vec{X}(t)\big)$$

e

$$\langle\psi_{\text{fin.}}|\psi_{\text{iniz.}}\rangle = \exp\big\{i(\gamma_d+\gamma(C))\big\}.$$

La relazione $\mathrm{Im}\,\langle\psi|d\psi\rangle = 0$ si ricava immediatamente dall' equazione di Schrödinger proiettata su $|\psi\rangle$ e gli stati $|n(\vec{X})\rangle$ sono una soluzione a fase fissata $\forall\,\vec{X}$ della $\hat{H}(\vec{X})|n\rangle = E_n(\vec{X})|n\rangle$.

Comunque l' oggetto matematicamente fondamentale per la fase di Berry è la due forma

$$V = \mathrm{Im}\,\langle dn|\wedge|dn\rangle$$

che è equivalente, come visto sopra, a un campo tensoriale antisimmetrico $V_{ij}(\vec{X})$ nello spazio dei parametri definito punto per punto da

$$V_{ij} = \mathrm{Im}\big(\langle\partial_i n|\partial_j n\rangle - \langle\partial_j n|\partial_i n\rangle\big)$$

invariante sotto il solito gauge di fase. V_{ij} non è però il più generico tensore invariante sotto tale gauge. È il cosi detto tensore quanto-geometrico

$$T_{ij}(\vec{X}) = \langle\partial_i n|(1-|n\rangle\langle n|)|\partial_j n\rangle$$

ad essere il tensore più generale invariante sotto la trasformazione suddetta. Tale tensore è hermmitiano e la sua parte immagginaria è proprio $V_{ij}/2$ così che, detto con $g_{ij}=\Re e\,T_{ij}$ si ha che

$$T_{ij} = g_{ij} + i\frac{V_{ij}}{2}.$$

Noi conosciamo il significato di V_{ij}: il suo flusso ci dà la fase $\gamma(C)$. Che significato ha g_{ij}? Si vede che g_{ij} da un modo naturale di misurare le distanza tra percorsi nello spazio dei parametri. Esso è il così detto tensore metrico quantistico. Per capire ciò osserviamo che un modo naturale per misurare la distanza al quadrato tra due vicini stati quantici è quello di misurare la deviazione del loro prodotto scalare dall' unità. Se si hanno due stati $|n(\vec{X}_1)\rangle$ e $|n(\vec{X}_2)\rangle$ si può dunque definire una distanza nello spazio dei parametri tra i punti $\vec{X}_1$ e $\vec{X}_2$ come

$$\Delta s_{12}^2 = 1 - \left|\langle n(\vec{X}_1)|n(\vec{X}_2)\rangle\right|^2.$$

Prendendo il limite $\vec{X}_1 \longrightarrow \vec{X}_2$ ($|n\rangle \equiv |n(\vec{X}_1)\rangle$, $|dn\rangle \equiv |n(\vec{X}_1 + d\vec{X}_1)\rangle$) si ha che
$ds^2 = 1 - \langle dn|n\rangle\langle n|dn\rangle$ ed essendo $\langle dn|dn\rangle = 1$ allora
$ds^2 = \langle dn|(1 - |n\rangle\langle n|)|dn\rangle = \langle \partial_i n|(1 - |n\rangle\langle n|)|\partial_j n\rangle dX_i dX_j = T_{ij} dX_i dX_j$
ed essendo $\mathrm{Im}\, T_{ij} \propto V_{ij}$ e V_{ij} è antisimmetrico allora

$$ds^2 = g_{ij} dX_i dX_j$$

che mette subito in evidenza il carattere di tensore metrico già attribuito a g_{ij}.

Degenerazione. Torniamo alla due forma di fase nel caso tridimensionale

$$\vec{V}_n(\vec{R}) = \mathrm{Im} \sum_{m \neq n} \frac{\langle n(\vec{R})|\nabla_{\vec{R}} \hat{H}(\vec{R})|m(\vec{R})\rangle \times \langle m(\vec{R})|\nabla_{\vec{R}} \hat{H}(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle}{\left(E_m(\vec{R}) - E_n(\vec{R})\right)^2}$$

e osserviamo il termine a denominatore. Se il circuito C giace vicino a un punto $\vec{R}'$ dove lo stato $|n(\vec{R})\rangle$ è degenere allora $\vec{V}_n$ è dominato da quei termini m-esimi corrispondenti agli altri stati degeneri di $|n(\vec{R})\rangle$. Per esempio consideriamo il caso più comune si uno stato due volte degenere ossia di due autostati di $\hat{H}(\vec{R})$ detti $|+\rangle$ e $|-\rangle$ con diversi numeri quantici ma energie uguali. Sia per esempio $E_+(\vec{R}) \geq E_-(\vec{R})$*. Allora, per esempio, $\vec{V}_+$ è scrivibile come

$$\vec{V}_+(\vec{R}) = \mathrm{Im} \sum_{m \neq +} \frac{\langle +(\vec{R})|\nabla_{\vec{R}} \hat{H}(\vec{R})|m(\vec{R})\rangle \times \langle m(\vec{R})|\nabla_{\vec{R}} \hat{H}(\vec{R})|+(\vec{R})\rangle}{\left(E_m(\vec{R}) - E_+(\vec{R})\right)^2}$$

ma per $\vec{R} \simeq \vec{R}'$ si ha che $\hat{H}(\vec{R}) \simeq \hat{H}(\vec{R}') + \nabla_{\vec{R}} \hat{H}(\vec{R}')(\vec{R} - \vec{R}')$ per cui $\nabla_{\vec{R}} \hat{H}(\vec{R}) \simeq 0 + \nabla_{\vec{R}} \hat{H}(\vec{R}')$ ed essendo $(E_+ - E_-)^2$ il termine dominante a denominatore si ha che

$$\vec{V}_n(\vec{R}) \simeq \mathrm{Im} \frac{\langle +(\vec{R})|\nabla_{\vec{R}'} \hat{H}(\vec{R})|-(\vec{R})\rangle \times \langle -(\vec{R})|\nabla_{\vec{R}} \hat{H}(\vec{R}')|+(\vec{R})\rangle}{\left(E_+(\vec{R}) - E_-(\vec{R})\right)^2}$$

mentre dato che $\vec{V}_-(\vec{R})$ è $\vec{V}_+(\vec{R})$ con i vettori scambiati nel prodotto vettoriale allora

$$\vec{V}_-(\vec{R}) = -\vec{V}_+(\vec{R})$$

*Ovviamente l' ugualianza vale in $\vec{R} = \vec{R}'$.

e quindi

$$\gamma_-(C) = -\gamma_+(C).$$

Ora, senza perdere in generalità, supponiamo che

$$E_\pm(\vec{R}') = 0, \quad \vec{R}' = 0;$$

la hamiltoniana $\hat{H}(\vec{R})$ più generica che accoppi gli stati $|+\rangle$ e $|-\rangle$ è scrivibile come una combinazione lineare delle tre matrici di Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

della forma

$$\hat{H}(\vec{R}) = \frac{1}{2}\big(X(t)\sigma_x + Y(t)\sigma_y + Z(t)\sigma_z\big) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Z & X - iY \\ X + iY & -Z \end{pmatrix}$$

dove $\big(X(t), Y(t), Z(t)\big) = \vec{R}(t)$ sono i tre parametri che corrono lungo C. Allora per quanto riguarda gli autovalori di $\hat{H}$ si ha che

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} Z - 2\lambda & X - iY \\ X + iY & -Z - 2\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow -Z^2 + 4\lambda^2 - X^2 - Y^2 = 0 \qquad \text{e dunque}$$

$$E_+(\vec{R}) = -E_-(\vec{R}) = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}|\vec{R}|$$

e dunque la degenerazione è un punto isolato in cui tutti e tre i parametri si annullano che riafferma un vecchio teorema che dice che affinchè appaia una degenerazione è necessario che i parametri del sistema siano almeno tre. Valutiamo allora $\vec{V}_+$; ruotiamo provvisoriamente gli assi ponendo Z lungo $\vec{R}$ $(X = Y = 0)$ allora si ha che

$$\sigma_x|\pm\rangle = \mp, \quad \sigma_y|\pm\rangle = \pm i|\mp\rangle, \quad \sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle = 2\hat{H}(Z)$$

ed essendo

$$\nabla_{\vec{R}}\hat{H}(\vec{R}) = \frac{1}{2}\vec{\sigma}, \qquad \vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

allora

$$\vec{V}_+(\vec{R}) = \mathrm{Im}\,\frac{\langle +(\vec{R})|\frac{1}{2}\vec{\sigma}|-(\vec{R})\rangle \times \langle -(\vec{R})|\frac{1}{2}\vec{\sigma}|+(\vec{R})\rangle}{(\frac{1}{2}|\vec{R}| + \frac{1}{2}|\vec{R}|)^2}$$

ed essendo

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\frac{\langle +|\sigma_y|-\rangle\langle -|\sigma_z|+\rangle}{R^2} = V_{+X} = 0$$
$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\frac{\langle +|\sigma_z|-\rangle\langle -|\sigma_x|+\rangle}{R^2} = V_{+Y} = 0$$
$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\frac{\langle +|\sigma_x|-\rangle\langle -|\sigma_y|+\rangle}{R^2} = V_{+Z} = \frac{1}{2R^2}$$

otteniamo che (nel sistema ruotato) $\vec{V}$ ha componenti solo lungo ZS allora, nel vecchio sistema di riferimento, $\vec{V}$ ha componenti solo lungo $\hat{R}$ e

$$\vec{V}_+(\vec{R}) = \frac{\hat{R}}{2R^2} = \frac{\vec{R}}{2R^3}, \qquad R = |\vec{R}|$$

che è analogo al campo magnetico di un monopolo di carica $-\frac{1}{2}$. La fase di Berry associata al circuito C vicino a $\vec{R}'$ risulta allora il flusso attraverso una superficie S di bordo C del campo di un monopolo magnetico di carica $-\frac{1}{2}$ posto nella degenerazione $\vec{R}'$ e dunque

$$\gamma_+(C) = -\iint_S \vec{V}_+(\vec{R}) \cdot d\vec{S}$$

e scelta come S la superficie della calotta sferica con bordo C centrata in $\vec{R}'$ e utilizzando Gauss si ha che

$$\gamma_+(C) = -\int_V \nabla \cdot \vec{V}_+ \, dV = -\int_V \nabla \cdot \frac{\vec{R}}{2R^3} = -\frac{3}{2R^3 V}$$

con V il volume dello spicchio sferico con calotta S. D' altra parte il volume di questo spicchio sferico risulta

$$V = \int_0^R R'^2 dR' \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta' \, d\theta' \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi' = \frac{R^3}{3}\Omega(C) \qquad \text{dove}$$

$$\Omega(C) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta' \, d\theta' \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi'$$

risulta l' angolo solido sotteso dalla traiettoria C come visto da $\vec{R}'$. Allora si è trovato che la fase di Berry associata al circuito C è

$$\gamma_\pm(C) = \mp\Omega(C).$$

Il fattore di fase geometrico che la funzione d' onda acquista una volta percorso il circuito C risulta allora

$$\exp\{i\gamma_\pm(C)\} = \exp\{\mp\frac{1}{2}i\Omega(C)\}.$$

Consideriamo ora come ulteriore esempio una particella di spin s il cui spin venga fatto riorientare tramite la lenta variazione di un campo magnetico esterno $\vec{B}$. La hamiltoniana di interazione risulta

$$\hat{H}(\vec{B}) = k\hbar\vec{B} \cdot \vec{S}$$

dove k è una costante contenente il rapporto giromagnetico e $\vec{S}$ è il vettore di spin avente $2s+1$ autostati. Gli autovalori di $\hat{H}$ sono

$$E_n(\vec{B}) = k\hbar B n$$

così che gli unici stati degeneri sono quelli a $\vec{B} = 0$ con grado di degenerazione $2s+1$ (se $s = \frac{1}{2}$ ricadiamo nel caso visto sopra). Consideriamo allora la rotazione di $\vec{B}$ lungo un circuito chiuso C

e calcoliamo la fase geometrica che viene ad acquistare un autostato $|n, s(\vec{B})\rangle$ dopo tale ciclo. $\vec{V}_n$ risulta allora

$$\vec{V}_n(\vec{B}) = \mathrm{Im} \sum_{m \neq n} \frac{\langle n, s(\vec{B})|\nabla_{\vec{B}} \hat{H}|m, s(\vec{B})\rangle \times \langle m, s(\vec{B})|\nabla_{\vec{B}} \hat{H}|n, s(\vec{B})\rangle}{\big(E_n(\vec{B}) - E_m(\vec{B})\big)^2} =$$
$$= \frac{1}{B^2} \mathrm{Im} \sum_{m \neq n} \frac{\langle n, s(\vec{B})|\vec{S}|m, s(\vec{B})\rangle \times \langle m, s(\vec{B})|\vec{S}|n, s(\vec{B})\rangle}{(n-m)^2}$$

e ruotando temporaneamente gli assi di modo che $\vec{B}$ abbia solo componenti su z si ha che

$$\begin{aligned}(S_x + iS_y)|n, s\rangle &= \big[s(s+1) - n(n+1)\big]^{\frac{1}{2}}|n+1, s\rangle;\\ (S_x - iS_y)|n, s\rangle &= \big[s(s+1) - n(n-1)\big]^{\frac{1}{2}}|n-1, s\rangle;\cdot\\ S_z|n, s\rangle &= n|n, s\rangle\end{aligned}$$

È allora chiaro che i soli m che danno contributi nella sommatoria sono $m = n \pm 1$ e V_x e V_y sono nulli perchè involvono S_z con elementi non diagonali. Allora l' unico non nullo è V_z che da

$$V_{zn}(\vec{B}) = \frac{1}{B^2}\mathrm{Im}(\langle n|S_x|n+1\rangle\langle n+1|S_y|n\rangle - \langle n|S_y|n+1\rangle\langle n+1|S_x|n\rangle + \langle n|S_x|n-1\rangle\langle n-1|S_y|n\rangle -$$
$$- \langle n|S_y|n-1\rangle\langle n-1|S_x|n\rangle \qquad \text{ed essendo}$$

$$\begin{aligned}\langle n \pm 1|S_x|n\rangle &= \frac{1}{2}\big[s(s+1) - n(n \pm 1)\big]^{\frac{1}{2}};\\ \langle n \pm 1|S_y|n\rangle &= \mp\frac{i}{2}\big[s(s+1) - n(n \pm 1)\big]^{\frac{1}{2}};\end{aligned} \qquad \text{allora}$$

$$V_{zn}(\vec{B}) = \frac{1}{B^2}\left\{-\frac{1}{4}\big[s(s+1) - n(n+1)\big] - \frac{1}{4}\big[s(s+1) - n(n+1)\big] + \frac{1}{2}\big[s(s+1) - n(n-1)\big]\right\} =$$
$$= \frac{1}{B^2}\big[\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}n(n-1)\big) = \frac{n}{B^2}$$

e tornando all' originale sistema di assi allora

$$\vec{V}_n(\vec{B}) = n\frac{\vec{B}}{B^3}$$

che è equivalente al campo magnetico generato da un monopolo di carica $-n$. Allora la fase di Berry è il flusso attraverso la superficie S di un campo magnetico generato da un monopolo di carica $-n$ posto nell' origine dello spazio del campo magnetico. Come sopra allora si ha che

$$\gamma_n(C) = -n\Omega(C)$$

dove $\Omega(C)$ è l' angolo solido sotteso da C come visto da $\vec{B} = 0$ e la fase geometrica che la funzione d' onda acquista è

$$\exp\{-in\Omega(C)\}.$$

Osserviamo come la fase dipenda solo dall' autovalore n dell' energia e non dallo spin s della particella così che γ_n è insensibil alla degenerazione in $\vec{B} = 0$.

Una conseguenza interessante della fase di Berry è che spiega in modo semplice il fatto che la carica magnetica, se esiste, deve essere quantizzata in unità inverse della carica elettrica. Considerando infatti l' integrale $\int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ è ovvio che, se invece della superficie S_1 si sceglie la superficie S_2 con $S_1 \cup S_2$ uguale alla superficie totale S della sfera, la fisica non può cambiare per cui esse differiscono di multipli di 2π ossia

$$\gamma_n(C) = \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} + 2\pi p, \qquad p = 0, \pm 1, \ldots$$

per cui

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} - \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 2\pi p$$

e se all' interno di S vi è una semplice interazione tra monopolo elettrico e e monopolo magnetico g allora

$$\int_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 4\pi e g = 2\pi p$$

da cui

$$eg = \frac{1}{2} p, \qquad p = 0, \pm 1, \ldots$$

per cui, se esiste, la carica magnetica è quantizzata in multipli di $\frac{1}{2e}$ e viceversa se esiste il monopolo magnetico allora la carica elettrica deve essere quantizzata e

$$e = \frac{p}{2e}, \qquad p = 0, \pm 1, \ldots$$

e questo è l' unico argomento che io conosco che spiega l' osservazione sperimentale che la carica elettrica è quantizzata.

Analisi sperimentale della fase di Berry. È ovvio che nonostante la fase di Berry sia un osservabile proprio a causa del suo specifico carattere di fase non è misurabile utilizzando un unico sistema fisico ma solo tramite l' interazione di due. Il primo metodo consiste nel preparare un sistema fisico in un suo determinato autostato, splittarlo in due, tenere uno fisso e far compiere all' altro un ciclo nel suo spazio dei parametri. Far poi interferire i due sistemi misurando la variazione di fase relativi (due hamiltoniane, uno stato). Un secondo metodo migliore in quanto fa uso di una unica hamiltoniana consiste nell' avere un sistema in un generico stato iniziale sovrapposizione di più autostati

$$|\psi(0)\rangle = \sum a_n |n\rangle,$$

si fa allora compiere un ciclo al sistema ottendo uno stato

$$|\psi(T)\rangle = \sum a_n |n\rangle e^{i\gamma_n(C)} e^{i_d^{(n)}};$$

si prende indi un osservabile $\hat{A}$ con non commuti con $\hat{H}(T)$ e calcolando il suo valore medio su $|\psi(T)\rangle$ si ha che

$$\langle\hat{A}\rangle_{|\psi(T)\rangle} = \sum |a_n|^2\langle n|\hat{A}|n\rangle + 2\Re e \sum_{m\neq n} a_m^\star a_n \langle m|\hat{A}|n\rangle \cos\big((\gamma_d^{(n)} - \gamma_n) - (\gamma_d^{(m)} - \gamma_m)\big)$$

e conosciuto $\langle\hat{A}\rangle$ si può ricavare γ_n.

Esperimenti sono stati fatti sia facendo riorientare gli spin facendo variare lentamente un campo magnetico esterno sia facendo interferire fotoni in cui si è invertito il vettore d' onda con fotoni rimasti inalterati e tali esperimenti hanno sempre verificato la teoria di Berry.

L' effetto Aharonov-Bohm. Nella fisica classica l' interazione tra particelle cariche e campi elettromagnetici avviene solo e soltanto se la particella carica attraversa delle linee di campo. Tuttavia esiste un esperimento in cui una particella carica subisce l' influenza di un campo magnetico anche se è tenuta separata da questo. Tale effetto detto di Aharonov - Bohm si manifesta con una variazione di fase della funzione d' onda della particella una volta che essa sia stata trasportata intorno ad una isolata linea di forza di un campo magnetico. L' effetto è spiegato perfettamente dalla fase di Berry.

Consideriamo una singola linea di campo di flusso

$$\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \Phi.$$

In un generico punto $\vec{R}$ non sulla linea di forza il campo è nullo però esiste qui un potenziale vettore $\vec{A}(\vec{R})$ tale che

$$\oint_C \vec{A}(\vec{R})\cdot d\vec{R} = \Phi$$

dove C è un circuito attorno alla linea di campo. Ahanarov e Bohm hanno mostrato che tale potenzile vettore ha, in meccanica quantistica, un sisgnificato fisico anche se corrisponde a un campo nullo. Mostriamo che tale effetto può essere interpretato come una fase geometrica. Consideriamo un sistema di particelle di carica q situato in $\vec{R}$ e non penetranti la linea di campo. In assenza di flusso sulla linea di forza si ha che $\vec{A}=0$ e la hamiltoniana dipende dall' impulso $\hat{p}$ e dalla posizione relativa $\vec{r}-\vec{R}$ tramite la

$$\hat{H}_0 = \hat{H}(\hat{p}, \vec{r}-\vec{R}).$$

Sia $\psi_(\vec{r}-\vec{R})$ l' autofunzione d' onda corrispondente all' autovalore E_n della hamiltoniana nello spazio delle coordinate ossia detto con $|N(\vec{R})\rangle$ l' autovettore dello spazio di Hilber del sistema tale che

$$\hat{H}_0|N(\vec{R})\rangle = E_n|N(\vec{R})\rangle$$

sia

$$\psi_n(\vec{r}-\vec{R}) = \langle\vec{r}|N(\vec{R})\rangle.$$

Se $\vec{A}\neq 0$ allora si ha che

$$\hat{H}_0 = \hat{H}(\hat{p}, \vec{r}-\vec{R}) \longrightarrow \hat{H} = \hat{H}(\hat{p}-q\hat{A}, \vec{r}-\vec{R}).$$

Le energie E_n restano invariate mentre le autofunzioni d' onda acquistano una fase detta di Dirac* talke che se $|n(\vec{R})\rangle$ è l' autovettore del nuovo spazio di Hilbert tale che

$$\hat{H}|n(\vec{R})\rangle = E_n|n(\vec{R})\rangle$$

si ha che

$$\langle\vec{r}|n(\vec{R})\rangle = \exp\left\{\frac{iq}{\hbar}\int_R^r dr'\cdot\vec{A}(\vec{r})\right\}\psi_n(\vec{r}-\vec{R}).$$

Ora, se si trasporta tale autofunzione lungo C essa acquista come visto una fase geometrica

$$\gamma_n = i\oint_C \langle n(\vec{R})|\nabla_{\vec{R}}n(\vec{R})\rangle\cdot d\vec{R}$$

ed essendo

$$\begin{aligned}\langle n(\vec{R})|\nabla_{\vec{R}}n(\vec{R})\rangle &= \iiint d^3\vec{r}\psi_n^\star(\vec{r}-\vec{R})e^{-\frac{iq}{\hbar}\int_R^r \vec{A}(\vec{r}')\cdot d\vec{r}'}\nabla_{\vec{R}}\left(e^{\frac{iq}{\hbar}\int_R^r \vec{A}(\vec{r}')\cdot d\vec{r}'}\psi_n(\vec{r}-\vec{R})\right) = \\ &= \iiint d^3\vec{r}\left[\psi_n^\star(\vec{r}-\vec{R})\nabla_{\vec{R}}\psi_n(\vec{r}-\vec{R}) + \psi_n^\star(\vec{r}-\vec{R})\left(-\frac{iq}{\hbar}\right)\vec{A}(\vec{R})\psi_n(\vec{r}-\vec{R})\right] = \\ &= -\frac{iq}{\hbar}\vec{A}(\vec{R})\end{aligned}$$

ove l' ultimo passaggio si giustifica in quanto $\psi_n \perp \nabla_{\vec{R}}\psi_n$. Allora si ha che

$$\gamma_n(C) = \frac{q}{\hbar}\oint_C \vec{A}(\vec{R})\cdot d\vec{R} = \frac{q}{\hbar}\Phi.$$

In tale caso, quindi, lo spazio dei parametri nel quale la particella si sposta non è definito da variabili astratte ma è lo spazio ordinario e C è un circuito reale nello spazio; analogamente la forma differenziale di fase $\frac{q}{\hbar}\nabla\times\vec{A} = \frac{q}{\hbar}\vec{B}$ è il campo magnetico per la carica fratto $\hbar$ e la fase stessa dipende dal flusso di tale campo magnetico ossia tutte quantità che rientrano perfettamente nella meccanica classica nonostante che l' effetto di fase sia un fenomeno puramente quantistico.

Dinamica dei parametri. Nei casi sopra esposti si è supposto che i parametri ambientali $\vec{X}$ siano variabili classiche nel senso che possono essere determinate con un grado di precisione arbitrariamente elevato e che inoltre l' ambiente non venga influenzato dalla variazione di fase che esso induce sul sistema. In realtà nessuna delle due supposizioni è giusta. La prima perchè i parametri $\vec{X}$ sono essi stessi delle variabili dinamiche e come tali soddisfano a un principio di indeterminazione con le proprie variabili coniugate. La seconda perchè in fisica nessuna azione è unilaterale. Se l' ambiente agisce sul sistema allora il sistema deve in qualche modo agire sull' ambiente. In realtà le variabili $\vec{X}$ sono variabili di un sistema "pesante" appunto l' ambiente accoppiato con un sistema "leggero" che è ciò che in precedenza è stato chiamato come il sistema. Un esempio di applicazione del teorema adiabatico è l' approssimazione di Borh - Oppeneimer in cui $\vec{X}$ descrive le coordinate della posizione dei nuclei molecolari (il sistema pesante in lenta variazione rispetto agli elettroni) mentre il sistema leggero sono gli elettroni in rapido movimento che vedono i nuclei come congelati

*E questa da dove viene fuori?

istante per istante. Recentemente si è dimostrato che all' ordine più basso l' accoppiamento sistema pesante sistema leggero può essere pensato come un campo di gauge consistente in un potenziale vettore il cui rotore è V_{ij} e di un potenziale scalare dipendente da g_{ij}. Qui vogliamo per l' appunto mostrare tale dipendenza del campo di gauge da T_{ij}.

Detto con $\hat{P}_i$ la variabile coniugata a X_i si ha che la più semplice hamiltoniana di accoppiamento sistema pesante-sistema leggero è scrivibile come

$$\hat{H}_{\text{tot.}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} Q_{ij}\hat{P}_i\hat{P}_j + \hat{H}(\vec{\xi},\vec{X})$$

dove Q_{ij} è il tensore di massa inverso, $\vec{\xi}$ sono le variabili dinamiche del sistema leggero e $\hat{H}$ è la hamiltoniana del sistema leggero sopra utilizzata (dove $\vec{X}$ erano solo dei parametri esterni) di autostati $|n(\vec{X})\rangle$ e energie $E_n(\vec{X})$. Nella rappresentazione delle coordinate detta con $|\psi\rangle$ un vettore d' onda dello spazio di Hilbert per $\hat{H}_{\text{tot.}}$ si ha che per il teorema adiabatico

$$\langle\vec{X}|\psi\rangle = \psi_{\text{pes}}\langle\vec{X}|n\rangle.$$

Sempre per il teorema adiabatico il sistema pesante vede una hamiltoniana effettiva data dal valore medio di $\hat{H}_{\text{tot.}}$ sullo stato $|n(\vec{X})\rangle$ ossia

$$\hat{H}_{\text{eff.}} = \langle n(\vec{X})|\hat{H}_{\text{tot.}}|n(\vec{X})\rangle = \frac{1}{2}\sum Q_{ij}\langle n(\vec{X})|\hat{P}_i\hat{P}_j|n(\vec{X})\rangle + E_n(\vec{X})$$

ma nello spazio delle coordinate $\hat{P}_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}$ e allora

$$\hat{P}_i|n(\vec{X})\rangle = -i\hbar|\partial_i n\rangle + |n\rangle\hat{P}_i$$

così che

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{eff.}} &= \frac{1}{2}\sum Q_{ij}\langle n(\vec{X})|\hat{P}_i(-i\hbar|\partial_i n\rangle + |n\rangle\hat{P}_j) + E_n = \\
&= \frac{1}{2}\sum Q_{ij}(i\hbar\langle\partial_i n| + |n\rangle\hat{P}_i)(-i\hbar|\partial_j n\rangle + |n\rangle\hat{P}_j) + E_n = \\
&= \frac{1}{2}\sum Q_{ij}(\hbar^2\langle\partial_i n|\partial_j n\rangle + i\hbar\langle\partial_i n|n\rangle - i\hbar\langle n|\partial_j n\rangle + \hat{P}_i\hat{P}_j) + E_n = \\
&= \frac{1}{2}\sum Q_{ij}(\hbar^2\langle\partial_i n|\partial_j n\rangle - \hbar^2\langle\partial_i n|n\rangle\langle n|\partial j n\rangle + \hbar^2\langle\partial_i n|n\rangle\langle n|\partial j n\rangle + i\hbar\langle\partial_i n|n\rangle - i\hbar\langle n|\partial_j n\rangle + \\
&\quad + \hat{P}_i\hat{P}_j) + E_n = \frac{1}{2}\sum Q_{ij} + \hbar^2\langle\partial_i n|n\rangle\langle n|\partial j n\rangle + i\hbar\langle\partial_i n|n\rangle - i\hbar\langle n|\partial_j n\rangle + \hat{P}_i\hat{P}_j) + E_n + \\
&\quad + \frac{\hbar^2}{2}\sum Q_{ij}(\langle\partial_i n|\partial_j n\rangle - \langle\partial_i n|n\rangle\langle n|\partial_j n\rangle)
\end{aligned}$$

ma d' altra parte $\langle\partial_i n|(1 - |n\rangle\langle n|)|\partial_j n\rangle = g_{ij}$ e detto con

$$\phi = \frac{\hbar^2}{2}\sum_{i,j} Q_{ij}g_{ij}$$

e detto con

$$A_i(\vec{X}) = i\hbar \langle n|\partial_i n\rangle$$

ed essendo A_i reale e dunque $A_i^+ = A_i = -i\hbar\langle \partial_i n|n\rangle$ si ha che

$\hat{H}_{\text{eff.}} = \frac{1}{2}\sum Q_{ij}(A_iA_j - A_i\hat{P}_j - A_j\hat{P}_i + \hat{P}_i\hat{P}_j) + \phi(\vec{X}) + E_n(\vec{X})$ e dunque

$$\hat{H}_{\text{eff.}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} Q_{ij}(\hat{P}_i - A_i)(\hat{P}_j - A_j) + \phi(\vec{X}) + E_n(\vec{X}).$$

Analizziamo i vari termini. Sul sistema pesante agiscono dunque tre forze. La prima data da $-\partial_i E_n$ è quella usuale data dalla approssimazione di Bohr - Oppeneimer che dice che la forza agente sul sistema pesante è il valore medio del gradiente dell'energia del sistema leggero. Le altre due sono forze derivanti da un potenziale scalare $\phi(\vec{X})$ e da uno vettore $\vec{A}$. L' effetto fisico prodotto dal potenziale vettore $\vec{A}$ è dato dal campo magnetico

$$B_{ij} = \text{rot}\,\vec{A} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

e si vede subito come

$B_{ij} = i\hbar\langle \partial_i n|\partial_j n\rangle - i\hbar\langle \partial_j n|\partial_i n\rangle = -\hbar\,\text{Im}(\langle \partial_i n|\partial_j n\rangle - \langle \partial_j n|\partial_i n\rangle) = -h\bar{V}_{ij}$

per cui la fase geometrica che il sistema leggero acquista si riflette sul sistema pesante come un campo magnetico proporzionale alla parte antisimmetrica del tensore geometrico. La parte simmetrica di tale tensore ossia quella che da la nozione di distanza tra due stati quantici del sistema leggero corrispondenti a diversi stati quantici di quello pesante si riflette in quest' ultimo via un campo elettrico $-\partial_i\phi$ che, se il tensore di massa è isotropo e $Q_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{m}$, dipende dalla traccia di g_{ij}.