Capitolo 1

Introduzione

1.1 L' isotropia della luce è veramente il punto debole della teoria della relatività?

Nonostante siano passati più di novanta anni dall'enunciazione dei principi fondamentali della relatività e nonostante essa abbia predetto correttamente l'evolversi di situazioni, per certi versi anche paradossali, in centinaia di verifiche sperimentali c' è ancora qualcuno che cerca di minare le sue fondamenta facendo breccia su certi paradossi marginali o su alcuni elementi non ricavabili dalla teoria ma da essa postulati.

Anzi, è proprio sul mattone fondamentale della teoria, il valore costante della velocità della luce in ogni sistema di riferimento inerziale, ad essere maggiormente utilizzato per minare le fondamenta della teoria. Infatti il fatto che il valore della velocità della luce e la sua misurazione venga convenzionalmente posto dalla teoria implica che tale valore non è ricavabile all' interno della teoria stessa.

Ciò che vogliamo analizzare, partendo da un' analisi storica dei metodi di misura della velocità della luce è che essi, tranne alcuni casi che analizzaremo in seguito, misurano in realtà la velocità della luce su percorsi di andata e ritorno impedendo così ogni tentativo di mostrare l' isotropia della velocità della luce rispetto al percorso.

Mostreremo che, in generale, esperimenti atti a misurare la velocità della luce su percorsi di sola andata vengono vanificati dalla necessità operativa di dover sincronizzare gli orologi in due punti differenti dello spazio secondo una modalità operativa da definire a priori prima dell' elaborazione della teoria. In realtà vedremo che non è la sincronizzazione il vero problema ma è il metodo prescelto a rendere non significativa tale misura. Si scoprirà che dei due metodi utilizzati per la sincronizzazione degli orologi, quello di Einstein produce proprio l' effetto di fissare a priori la velocità della luce su tutti i percorsi mentre l' altro, quello classico della sincronizzazione per trasporto, è del tutto equivalente a quello di Einstein nell' ambito della formulazione della relatività ristretta. Scopriremo però che se si esce dall' ambito della relatività ristretta è possibile costruire teorie a essa equivalenti ma per le quali la misura della velocità della luce su percorsi di sola andata è non banale.

Useremo proprio tale test per analizzare esperimenti che ci permettono di definire, se non una prova dell' isotropia della velocità della luce, dei limiti superiori ad una possibile anisotropia. In particolare analizzeremo inoltre un esperimento compiuto di recente che ha effettivamente misurato tali limiti.

Ci proponiamo inoltre di analizzare quelle tecnologie di uso ormai comune che, secondo il nostro parere, si basano proprio sulla *one-way light speed* e che, senza la sua isotropia, non funzionerebbero o al più funzionerebbero molto male e che dunque pongono esse stesse, di fatto, dei limiti superiori a tale anisotropia.

1.2 Problema storico

Fin dall' antichità l' uomo fu portato a tentare di compiere misurazioni circa la velocità di propagazione della luce. Lo stesso Galileo racconta del suo fallito tentativo tramite l' utilizzo di lanterne poste su due colline. Tali tentativi "terrestri" erano destinati a sicuro fallimento a causa dell' elevato valore di detta velocità e a causa della imperfetta strumentazione utilizzata.

Una prima misurazione corretta riguardo all' ordine di grandezza di questa velocità fu data da Roemer nel 1676 utilizzando però un metodo astronomico tramite la variazione dell' occultamento delle lune di Giove in differenti periodi dovuti alla differente posizione relativa tra la Terra e Giove e dunque dalla differente distanza di cammino compiuta dalla luce. Successivamente tali metodi e ulteriori altri metodi furono raffinati fino a giungere a buone precisioni di misura.

Paradossalmente però, come vedremo, quello di Roemer è uno dei pochi esperimenti in cui gioca effettivamente un ruolo la *one-way light speed*. La maggior parte degli altri sono in realtà esperimenti riferiti a misure della velocità della luce su percorsi di andata e ritorno e nono possono dunque dirci niente su una sua eventuale anisotropia. Appartengono a tale gruppo, per esempio, gli esperimenti di Frizeau e di Foucalt (**Nota:** *spiegare brevemente se possibile questi esperimenti mostrando dove entra la two-way light speed*) .

Un' altro esperimento, meno conosciuto, ma che invece involve la velocità della luce su percorsi di sola andata è la misura dell' effetto Doppler trasverso che vedremo potra darci, oltre all' esperimento di Roemer, una valutazione del limite superiore dell' anisotropia.

Vedremo inoltre (spero!!!!) che un' altro esperimento, quello di Bradley basato sull' effetto dell' abberrazione non ha nulla a che vedere con la velocità della luce su percorsi di sola andata.

1.3 Il Metodo di sincronizzazione di Einstein

Da quanto fin qui detto, risulta chiaro dunque che, per misurare una qualche anisotropia nella velocità della luce non ci si può basare semplicemente su misure che analizzano un solo punto nello spazio ma è necessario analizzare il tempo che la luce impiega a percorrere a transitare da un punto A ad un punto B confrontando tale tempo con quello necessario a percorrere lo spazio dal punto A ad un punto C differente da B.

Per la buona riuscita dell' esperimento è però necessarià una modalità operativa di sincronizzazione tra gli orologi nei due punti dell' esperimento. Oltre al classico metodo della sincronizzazione degli orologi per trasporto dove due orologi vengono sincronizzati nello stesso punto e poi uno di essi viene trasportato nell' altro punto (trasportato lentamente rispetto a c) vi è un altro metodo introdotto da Einstein [1] consistente nell' utilizzo di onde elettromagnetiche per la sincronizzazione degli orologi.

In sostanza dal punto A, per esempio, viene inviato un impulso elettromagnetico verso B ad un istante concordato in precedenza. Al giungere del segnale in B si sincronizza l' orologio tenendo conto dell' istante concordato e del tempo che l' impulso ha impiegato a percorrere il percorso tra A e B, tempo che, detta con d questa distanza, può essere facilmente calcolato come d/c.

Ma in questo calcolo, apparentemente del tutto innocente, si nasconde il problema che impedisce, all' interno del costrutto logico della teoria della relatività ristretta, il calcolo della velocità della luce su percorsi di sola andata; nel fatto che per il calcolo del tempo impiegato dall' impulso elettromagnetico di sincronizzazione tra A e B interviene proprio il valore c che si vuole studiare. La sua definizione all' interno della S.R. invalida la possibilità di ricavare un valore sperimentale differente dall' esperimento di cui sopra.

Capitolo 2

Test della teoria della relatività ristretta

2.1 Teorie alternative compatibili con la S.R. per la determinazione della "*one way light velocity*"

Come detto, il problema dell' ugualianza della velocità della luce in due direzioni opposte, quando la sincronizzazione degli orologi è fatta con il metodo di Einstein è ovvia e dunque non può essere oggetto di ulteriore studio. Abbiamo però accennato sopra che esiste un altro metodo, che poi è quello usato in fisica classica, per la sincronizzazione degli orologi: il metodo del trasporto.

Si potrebbe pensare dunque di utilizzare tale metodo per ottenere dei risultati non triviali riguardanti il calcolo in oggetto. È stato però dimostrato [3] e lo si può vedere in forma analitica nell' Appendice A che la procedura di sincronizzazione degli orologi per trasporto e la procedura di sincronizzazione di Einstein sono equivalenti se ci si muove all' interno della S.R.

C' è però una via che conduce a calcoli non triviali circa la velocità della luce su percorsi di sola andata e questa porta all' utilizzo della procedura di trasporto quale metodo di sincronizzazione applicato però a teorie le cui espressioni basilari non coincidono esattamente con quelle della S.R.

Si parte dunque dal presupposto che la relatività ristretta rappresenti solo un' approssimazione e che gli ottimi risultati avuti nella descrizione degli esperimenti siano dovuti solo ad una limitata precisione degli strumenti di misura. È questa quindi la via che intendiamo percorrere per avere una teoria che testi la relatività ristretta dall' esterno, quella di cercare di esplorare possibili deviazioni dalle espressioni predette dalla teoria della relatività.

2.2 Il test della relatività di Mansouri e Sexl

2.2.1 Introduzione

Il lavoro di Mansouri e Sexl [2] [1] che ci apprestiamo qui ad analizzare si base sullo sviluppo di una classe di teorie equivalenti a quella della S.R. Utilizzando tali teorie si cercherà di analizzare i metodi di sincronizzazione che sono alla base della misura della "*one-way light velocity*" ricercando, in particolare, quali siano le condizioni per cui la sincronizzazione per trasporto è equivalente con quella Einstaniana in quanto, come detto sopra, si utilizzerà poi proprio il metodo del trasporto per costruire espressioni non triviali per la misura della velocità della luce su percorsi di sola andata.

I due metodi fin ora introdotti, quello del trasporto e quello di Einstein appartengono a quella classe di metodi di sincronizzazione detti "*sincronizzazione con metodi interni*" ma esiste un' altro classe di metodi di sincronizzazione importante per il nostro lavoro che viene detta "*sincronizzazione con metodi esterni*". Con i metodi appartenenti a tale classe si definisce un particolare sistema di riferimento (il sistema dell etere) e tutti gli orologi negli altri sistemi vengono sincronizzati con quelli del sistema dell' etere. Vi sono però un' infinità di metodo con cui può essere effettuata operativamente tale sincronizzazione ma, tra questa infinità vedremo che ne esiste una in cui, la fisica che ne viene fuori, è fondamentalmente equivalente alla S.R. Questa teoria che, per così dire, riscopriremo, altri non è se non la generalizzazione di quella sviluppata da Lorentz-Loran-Poincarè.

2.2.2 Modello unidimensionale

Iniziamo considerando il problema della sincronizzazione degli orologi in un mondo unidimensionale considerando la sincronizzazione S_T ottenuta tramite il trasporto "*lento*" degli orologi da un punto all' altro e la procedura di sincronizzazione di Einstein S_E che utilizza, per la sincronizzazione, dei segnali luminosi.

Imponiamo alcune ipotesi di lavoro circa la propagazione della luce. Il primo vincolo che imponiamo è che la velocità della luce sia indipendente dalla condizione di moto della sorgente che la genera. Il secondo vincolo è che assumiamo esistere un sistema di riferimento Σ (sistema dell' etere) tale che, in esso, la sincronizzazione S_E coincida con la S_T. Tale condizione implica che, in Σ la velocità della luce, come misurata dagli orologi sincronizzati con il metodo S_T è isotropica [2]

[1] I calcoli completi relativi a questo lavoro possono essere trovati nella appendice A di questo lavoro

[2] Infatti, se così non fosse, consideriamo un punto O in Σ e spostiamo due orologi sincronizzati con un terzo che resta in O in due posizioni A e B con $A \not\equiv B \not\equiv O$ e, senza perdita di generalità supponiamo che $\bar{OA} = \bar{OB}$. Consideriamo ora la situazione in cui lungo il segmento $\bar{OA}$ la velocità della luce sia differente rispetto a quella lungo il braccio $\bar{OB}$. Inviamo allora degli impulsi luminosi di sincronizzazione da O agli orologi in A e in B. Ora, a causa della diversa velocità della luce lungo i due tratti essa non giungerà nello stesso istante ai due orologi che quindi si sincronizzeranno in modo

Per semplificarci ulteriormente la vita consideriamo un' opportuna scala dei tempi e dello spazio in Σ tale che la velocità della luce sia, in Σ, uguale a uno. Consideriamo ora un secondo sistema di riferimento S in moto con una velocità $v < c$ rispetto a Σ ossia, per essere pedantemente precisi, tale che l' origine di S si muove con velocità v quando misurata con il sistema di orologi e regoli definito in Σ. Anche S, ovviamente, possiede un sistema di orologi e regoli costituito con le stesse modalità operative scelte per Σ, regole che, facciamo notare, non sono state ancora definite.

Il nostro scopo sarà infatti proprio quello di valutare l' influenza delle diverse scelte di metodi di sincronizzazione interna degli strumenti di misura rispetto alle trasformazioni tra Σ e S. Iniziamo allora considerando delle trasformazioni lineari tra le coordinate $\Sigma(X, T)$ e le coordinate $S(x, t)$ della forma

$$\begin{cases} t = aT + \epsilon x \\ x = b(X - vT) \end{cases} \tag{2.1}$$

con a, b, ϵ arbitrarie funzioni di v da determinare in base alla teoria o in base a misure sperimentali. L' espressione $1/a(v)$ indica la dilatazione dei tempi della teoria mentre $b(v)$ l' espressione della dilatazione delle lunghezze. Per quanto riguarda $\epsilon(v)$ esso non si ricava, e dunque non dipende, dagli esperimenti ma è determinato dalla convenzione utilizzata per la sincronizzazione degli orologi.

Risincronizzare gli orologi utilizzando un generico metodo implica di dover rimpiazzare t con una $f(x, v)$ che caratterizza, per l' appunto la procedura scelta. Se ad esempio, si utilizzano le trasformazioni di Lorentz identiche alle 2.1 ma dove

$$b(v) = \frac{1}{a(v)} = \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2)}} \tag{2.2}$$

e dove $\epsilon(v) = -v$ ossia le

$$\begin{cases} t = \sqrt{1 - v^2}\, T - vx \\ x = \dfrac{X - vT}{\sqrt{1 - v^2}} \end{cases} \tag{2.3}$$

utilizzando come prescrizione la

$$f(x, v) = -vx$$

differente tra di loro. Siamo quindi giunti ad una contraddizione in quanto, da un lato siamo partiti dall' ipotesi che S_T sia equivalente a S_E e dall' altro siamo giunti ad avere degli orologi sincronizzati tramite S_T che si sono sincronizzati in modo differente quando si è usata S_E. La contraddizione sta proprio nell' aver supposto differente la velocità della luce tra i due bracci ed essendo A e B punti generici di Σ si deduce immediatamente la generalità dell' ugualianza della velocità della luce rispetto a qualsiasi direzione in Σ.

si ha che

$$t \mapsto t + f(x,v) = t - vx = at - vx$$

è dunque

$$\begin{cases} t = aT \\ x = b(X - vT) \end{cases} \tag{2.4}$$

Le 2.4 sono equivalenti alle 2.3 nella misura in cui se il risultato di un esperimento può essere correttamente interpretato dalla 2.3 allora lo stesso può essere correttamente interpretato anche dalla 2.4. La sola differenza fisica tra le due trasformazioni è che, nella seconda, è stato eletto il sistema $\Sigma(X,T)$ come sistema dell' etere in cui gli orologi sono stati sincronizzati con il metodo di Einstein. Gli orologi in un altro sistema $S(x,v)$ sono stati invece sincronizzati utilizzando il metodo $t \mapsto t - vx$ ove v è la velocità del sisyema S rispetto a Σ.

Osserviamo che, a causa del fatto che per $T = 0$ anche $t = 0$ (nella rappresentazione di Lorentz si salva il concetto di simultaneità degli eventi) è possibile un ulteriore metodo di sincronizzazione degli orologi in ogni punto di S. Il metodo consiste nell' aspettare, punto per punto, che esso passi per un orologio di Σ che segna, all' istante del passaggio, l' istante zero e impostare detto orologio in S esso stesso a zero. Questa procedura in cui gli orologi di S vengono sincronizzati tra di loro utilizzando gli orologi di Σ fa parte del gruppo delle "*sincronizzazioni con metodi esterni*". Indicheremo tale sincronizzazione con S_A.

Come accenato poco sopra, la teoria di Lorentz, salva il concetto classico di simultaneità degli eventi. Essa ha però il notevole svantaggio di distruggere l' equivalenza di tutti i sistemi inerziali avendone eletto uno a sistema privilegiato rendendo impossibile la costruzione di teorie con leggi invariati in ogni sistema di riferimento. Questa teoria è però perfettamente compatibile con gli esperimenti eseguiti per comprovare la teoria della relatività infatti, per esempio,nell' ipotesi che esista un sistema di riferimento dell' etere che soddisfa le trasformazioni 2.4 si vede che gli orologi rallentano se sono in moto rispetto ad esso mentre i regoli si allungano; dal sistema di riferimento in moto rispetto all' etere, invece, i regoli fermi in Σ si accorciano mentre gli orologi accellerano.

Per quanto riguarda la legge di composizione delle velocità troviamo che, posto $x = ut$ e $X = wT$ si ha che

$x = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(wT - vT) = ut = u\sqrt{1-v^2}\,T \Longrightarrow w = v + u(1 - v^2)$

e dunque si ottiene che, in questa teoria, la velocità della luce non è più un limite. Inoltre, se in S il punto x si muove con velocità c rispetto a Σ si ha che $w' = v + c(1 - v^2)$ mentre se si muove con velocità $-c$ si ha che $w'' = v + c(1 - v^2) \neq w'$ e dunque questa teoria ci mostra l'anisotropia della propagazione della luce in tutti i sistemi di riferimento eccetto per il sistema dell' etere.

Torniamo ora alla 2.1 e abbandoniamo completamente l' assunto che $a(v)$ e $b(v)$ possano essere i valori dati dalla teoria della S.R. e lasciamoli per ora indeterminati. Utilizzando il metodo di sincronizzazione degli orologi per trasporto si viene a trovare per $\epsilon_T(v)$ che esso risulta essere

$$\epsilon_T(v) = \frac{1}{b(v)} \frac{\mathrm{d}a(v)}{\mathrm{d}v} \tag{2.5}$$

e dunque, se si utilizza il metodo di sincronizzazione del trasporto la $\epsilon(v)$ dipende inversamente da $b(v)$ e direttamente dalla $a'(v)$ Osseriviamo inoltre che, assumendo per $a(v)$ e per $b(v)$ i valori dati dalla teoria della relatività ristretta, si riottiene proprio la $\epsilon = -v$. Considerando invese il caso di sincronizzazione degli orologi con il metodo di Einstein si ottiene che

$$\epsilon_E(v) = -\frac{v}{1-v^2} \frac{a(v)}{b(v)} \tag{2.6}$$

e dunque, come si vede, in generale la procedura S_E differisce dalla S_T. L' unico caso si ha quando

$$\epsilon_E = \epsilon_T \tag{2.7}$$

e ciò avviene solo e soltanto se

$$a(v) = \sqrt{1-v^2} \tag{2.8}$$

ossia la sincronizzazione per trasporto coincide con quella di Einstein se e solo se il fattore di dilatazione dei tempi $a(v)$ è dato *esattamente* dal valore previsto dalla relatività ristretta.

2.2.3 Modello tridimensionale

Passiamo ora a generalizzare il discorso nel caso tridimensionale. In tale ambiente, la trasformazione generica tra il sistema $\Sigma(T, X, Y, Z)$ e il sistema $S(t, x, y, z)$ in moto rispetto a Σ con velocitã $\vec{v}$ sarà della forma

$$\begin{aligned}
t &= aT + \epsilon_1 x + \epsilon_2 y + \epsilon_3 z && \text{(2.9a)}\\
x &= b_1 T + b_2 X + b_3 Y - b_4 Z && \text{(2.9b)}\\
y &= d_1 T + d_2 X + d_3 Y + d_4 Z && \text{(2.9c)}\\
z &= e_1 T + e_2 X + e_3 Y + e_4 Z && \text{(2.9d)}
\end{aligned}$$

Ora, con lo scopo di eliminare alcuni coefficienti, vincoliamo il nostro studio imponendo alcune considerazioni cinematiche che, comunque, non eliminano la generalità del discorso. Imponiamo, come prima condizione, che il moto di S rispetto a Σ abbia componenti solo lungo l' asse delle X e che l' asse x e l' asse X coincidano ossia che l' asse x scorra lungo l' asse X. Matematicamente ciò si esprime assumendo che per ogni T e X se $y = z = 0$ allora anche $Y = Z = 0$. Da queste considerazioni si deduce che

$$\begin{aligned} 0 &= d_1 T + d_2 X \\ 0 &= e_1 T + e_2 X \end{aligned} \quad \forall X, T \tag{2.10}$$

e posto $X = 0, T \neq 0$ o $X \neq 0, T = 0$ separatamente, si ha che

$$\begin{aligned} d_1 &= d_2 = 0 \\ e_1 &= e_2 = 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Come seconda imposizione, supponiamo che in realtà non sia solo l' asse x a scivolare lungo l' asse X ma sia l' intero piano xz a scorrere lungo XZ. Ciò si esprime dicendo che per ogni T, X, Y se $y = 0$ allora anche $Y = 0$ e sostituita nella 2.9c questo implica che

$$d_4 = 0 \tag{2.12}$$

Come ultima costrizione cinematica imponiamo il fatto che v è la velocità del sistema S rispetto a Σ ossia che l' origine di S si muove con velocità v rispetto a Σ e che per $t = 0$ le due origini coincidano. L' espressione matematica di quanto detto si esprime dicendo che se $X = vt, Y = 0, Z = 0$ allora questo è l' origine del sistema S ossia che $x = y = z = 0$ espressione, che, inserita nella 2.9b

$$0 = b_1 T + b_2 v T \Longrightarrow b_1 = -b_2 v T \tag{2.13}$$

Siamo, al termine di tutti i vincoli cinematici, rimasti con un espressione

$$t = aT + \epsilon_1 x + \epsilon_2 y + \epsilon_3 z \tag{2.14a}$$
$$x = b_2(T - vX) + b_3 Y + b_4 Z \tag{2.14b}$$
$$y = d_3 Y \tag{2.14c}$$
$$z = e_3 Y + e_4 Z \tag{2.14d}$$

Andiamo ora a imporre alcuni vincoli di carattere generale sulle 2.14 in modo da ridurre ulteriormente i coefficenti dell' espressione. In Σ, sistema in cui, ricordiamo, vale la $S_T = S_E$, supponiamo che non esistano direzioni privilegiate. Questo implica, come nel caso unidimensionale che, in Σ, la misura della velocità della luce è indipendente dalla direzione di propagazione dell' onda elettromagnetica e, inoltre, implica che il sistema S, come visto da Σ, possiede una sola direzione privilegiata che è quella in cui punta $\vec{v}$.

Soffermiamoci ora sul coefficiente e_3 della 2.14d. Un suo valore non nullo implica che il piano xy è inclinato rispetto a XY ma tale inclinazione non è plausibile in quanto, per costruire una trasformazione che produce una rotazione è necessario avere uno pseudovettore di rotazione che non può essere dunque $\vec{v}$. Ma allora S vista daΣ avrebbe un' altra direzione privilegiata oltre a $\vec{v}$ che contraddice l' asserto sopra. Stesso discorso vale per b_3 e b_4 che implicherebbero una rotazione del piano yz rispetto a YZ.

$$\begin{aligned} e_3 &= 0 \\ d_3 &= d_4 = 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Per considerazioni analoghe si ha che

$$d_3 = e_4 \tag{2.16}$$

altrimenti il diverso fattore di scala tra x e y genererebbe una nuova direzione privileggiata non esprimibile come funzione di $\vec{v}$. Siamo allora giunti in definitiva alla trasformazione

$$t = a(v)T + \epsilon_1(v)x + \epsilon_2(v)y + \epsilon_3(v)z \tag{2.17a}$$
$$x = b(v)(T - vX) \tag{2.17b}$$
$$y = d(v)Y \tag{2.17c}$$
$$z = d(v)Z \tag{2.17d}$$

dove si è rinominato con $b \equiv b_3$ e $d \equiv d_3 = d_4$. È questa l' espressione generica delle trasformazioni delle coordinate spazio-temporali tra Σ e S che useremo per determinare i tre coefficienti $\vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ in base al metodo di sincronizzazione prescelto in funzione delle $a(v), b(v), d(v)$ che invece vanno determinati con esperimenti o in base a ulteriori ipotesi restrittive sulla classe delle leggi fisiche in vigore tra i due sistemi di riferimento.

Seguendo la falsa riga del metodo seguito nel caso unidimensionale si trova che[3], nel caso del metodo di sincronizzazione per trasporto S_T

$$\vec{\epsilon}_T = \left(\frac{1}{b(v)}\frac{\mathrm{d}a(v)}{\mathrm{d}v}, 0, 0\right) \tag{2.18}$$

nel caso del metodo di sincronizzazione di Einstein S_T

$$\vec{\epsilon}_E = \left(-\frac{a(v)v}{b(1-v^2)}, 0, 0\right) \tag{2.19}$$

nel caso del metodo di sincronizzazione con gli orologi del sistema dell' etere S_A

$$\vec{\epsilon}_A = \vec{0} = (0, 0, 0) \tag{2.20}$$

[3] I calcoli estesi dei risultati di seguito esposti possono essere trovati nella sezione A.1.2

È possibile dare una rappresentazione matematica succinta delle 2.17 in forma vettoriale nella seguente rappresentazione

$$
\begin{aligned}
t &= aT + \vec{\epsilon}\cdot\vec{x} && (2.21a)\\
\vec{x} &= d\vec{X} + \frac{b-d}{v^2}\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{x}) - b\vec{v}T && (2.21b)
\end{aligned}
$$

e, considerando a tutti gli effetti che ne il metodo del trasporto ne quello di Einstein introducono nuove direzioni privileggiate in S deve essere che $\vec{\epsilon} \parallel \vec{v} \parallel \hat{x}$ e si può dunque porre $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$.

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti adatti a calcolare teoricamente la velocità di un raggio di luce in funzione dell' angolo θ di propagazione rispetto all' asse delle x. Invertendo le 2.17 e trasformando il cono di luce $X^2 + Y^2 - c^2T^2 = 0$ in S si ottiene che

$$
\begin{aligned}
c(\theta) = {} & (1 - 2\,\epsilon_1\,\cos(\theta) + {\epsilon_1}^2\cos(\theta)^2 - 2\,\epsilon_2\,\sin(\theta) + 2\,\epsilon_1\,\epsilon_2\,\cos(\theta)\,\sin(\theta) + \\
& + {\epsilon_2}^2\sin(\theta)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(v^2 + \frac{2\,a\,v\,\cos(\theta)}{b} - 2\,\epsilon_1\,v^2\,\cos(\theta) + \frac{a^2\cos(\theta)^2}{b^2} - \right.\\
& - \frac{2\,a\,\epsilon_1\,v\cos(\theta)^2}{b} + {\epsilon_1}^2\,v^2\cos(\theta)^2 - 2\,\epsilon_2\,v^2\,\sin(\theta) - \frac{2\,a\,\epsilon_2\,v\,\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{b} + \\
& \left. + 2\,\epsilon_1\,\epsilon_2\,v^2\,\cos(\theta)\,\sin(\theta) + \frac{a^2\sin(\theta)^2}{d^2} + {\epsilon_2}^2\,v^2\sin(\theta)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

Questa[4] è l' espressione generale della *one way light velocity* in cui non si è ancora specializzato il tipo di metodo di trasporto da utilizzare. Specializzandolo per S_T si ha che[5]

$$c(\theta) = 1 - (1 + 2\alpha)v\,\cos(\theta) \qquad (2.23)$$

Specializzando il risultato per S_E si ha che[6]

$$c(\theta) = 1 - (1 + \alpha - \beta)\,v^2 + (-\tfrac{1}{2} + \beta + \delta)\,v^2\,\sin^2(\theta) \qquad (2.24)$$

Da queste si osserva che tramite S_T sono osservabili solo effetti dell' ordine di v per la velocità della luce mentre con S_E tali termini non appaiono ma appaiono effetti del secondo ordine.

[4]La 2.22 è strutturalmente differente da quella ottenuta in [2] ma dovrebbe essere uguale una volta riorganizzati i vari termini. I risultati sono infatti sostanzialmente compatibili tranne errori da verificare

[5]I calcoli da me ottenuti hanno dato $c(\theta) = 1 + (1 + 2\alpha)v\,\cos(\theta)$ ma ciò può essere dovuto a un problema del software utilizzato per il calcolo. Da verificare.

[6]I calcoli da me ottenuti danno $c(\theta) = 1 - (1 + \alpha - \beta)\,v^2 + (\frac{1}{2} - \beta + \delta)\,v^2\,\sin^2(\theta)$ e non so proprio se sono sbagliati infatti in [4] ottengono un risultato simile con $\frac{1}{2} + \delta - \beta$ come coefficiente per il termine angolare in v^2

Appendice A

Calcoli estesi

A.1 Calcoli relativi al test della relatività ristretta

A.1.1 Modello unidimensionale

Seguendo il percorso del paragrafo 2.2.2 partiamo dalla 2.1 e abbandoniamo completamente l' assunto che $a(v)$ e $b(v)$ possano essere i valori dati dalla teoria della S.R. e lasciamoli per ora indeterminati. Vediamo quindi di ricavarci per esteso la formula 2.5 nel caso di sincronizzazione dovuta a trasporto degli orologi e successivamente la 2.6 nel caso di sincronizzazione con il metodo di Einstein.

Consideriamo dunque un orologio in S che si sposta rispetto a S con velocità u piccola se confrontata con c lungo l' asse delle x che viene usato per sincronizzare gli orologi di S con il metodo S_T. Si ha allora che

$x = ut \Longrightarrow t = a(v)T + \epsilon(v)ut \Longrightarrow t = \dfrac{a(v)T}{1-\epsilon(v)u}$ e sostituendo alla seconda delle 2.1

$$u\frac{a(v)T}{1-\epsilon(v)u} = b(v)X - b(v)T \Longrightarrow X = T\left[\frac{a(v)u}{[1-\epsilon(v)u]b(v)} + v\right]$$

d' altra parte u è piccola e possiamo allora sviluppare questa espressione in serie di u. Sviluppando il solo termine $\frac{au}{(1-\epsilon u)b}$ si ha che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{au}{(1-\epsilon u)b}\right)\Bigg|_{u=0} = \frac{a(1-\epsilon u)b + au\epsilon b}{(1-\epsilon u)^2 b^2}\Bigg|_{u=0} = \frac{ab}{(1-\epsilon u)^2 b^2}\Bigg|_{u=0} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\left(\frac{au}{(1-\epsilon u)b}\right)\Bigg|_{u_0} = \frac{ab^2(1-\epsilon u)b\epsilon}{(1-\epsilon u)^4 b^4}\Bigg|_{u=0} = \frac{2ab^2\epsilon}{b^4} = \frac{2a\epsilon}{b^2}$$

e dunque

$$\frac{au}{(1-\epsilon u)}b = \frac{a}{b}u + \frac{2a\epsilon}{b^2}u + o(u^3) \tag{A.1}$$

e tralasciando i termini superiori a u si ha che

$$X \simeq T\left(\frac{au}{b}+v\right)=wT, \quad w \overset{\text{def.}}{=} \left(\frac{au}{b}+v\right) \tag{A.2}$$

Passiamo ora a considerare l' orologio in moto in S come fermo nell' origine di un sistema di riferimento $S'(t',x')$ solidale con esso in moto con velocità relativa w rispetto a Σ. Per il tempo t' che batte l' orologio si ha che

$$t'|_{x'=0} = a(w)T + \epsilon(w)\ x'|_{x'=0} = a(w)T \tag{A.3}$$

ma, il fatto che stiamo sincronizzando gli orologi di S utilizzando l' orologio in quiete in S' impone che $t'(x) = t(x)$ per ogni x e dunque

$$t = a(v)T + \epsilon_T(v)x = a(w)T = t' \tag{A.4}$$

dove abbiamo aggiunto il pedice T a ϵ ad indicare che si tratta di sincronizzazione per trasporto. Sostituendo la A.2 nella seconda delle 2.1 si ha che

$x = b(v)\left(T\dfrac{a(v)u}{b(v)}+tv-vt\right) = a(v)uT$ e sostituendo nella A.4

$a(v)T + \epsilon_T(v)a(v)uT = a(w)T$ e dunque

$$\epsilon_T(v) = \frac{a(w)-a(v)}{ua(v)} \tag{A.5}$$

Ora, abbiamo visto che il moto dell' orologio in S appare lento e quindi, visto da Σ si ha che $w \simeq u$ e dunque si puo scrivere che

$\dfrac{a(w)-a(v)}{w-u} \simeq \dfrac{\mathrm{d}a(v)}{\mathrm{d}v}$ e d' altra parte, per la A.2

$\dfrac{a(v)u}{b(v)} \simeq w \Longrightarrow w\dfrac{a(v)}{b(v)} = w-u$ e dunque

$a(w)-a(v) \simeq \dfrac{\mathrm{d}a(v)}{\mathrm{d}v}\dfrac{a(v)}{b(v)}u$ e sostituendo nella A.5 si ha infine la 2.5 che qui riproduciamo

$$\epsilon_T(v) = \frac{1}{b(v)}\frac{\mathrm{d}a(v)}{\mathrm{d}v} \tag{A.6}$$

Passiamo ora ai calcoli della formula 2.6 relativi alla metodologia di trasporto descritta da Einstein. Consideriamo questa volta due orologi fermi in due punti A e B del sistema di riferiemento S in moto rispetto a Σ con velocità V e supponiamo che a $t = 0$ l' orologio in A invia un segnale di sincronismo all' orologio in B che riceve detto segnale al tempo t_1. Immediatamente l' orologio in B invia un impulso elettromagnetico di risposta all' orologio in A che lo riceve al tempo t_2. Per la sincronizzazione degli orologi deve essere che $t_2 = 2t_1$.

Per A si ha che $t_2 = a(v)T_2 + \epsilon_E\, x|_{x=0} = a(v)T_2$
Per B si ha che $t_1 = a(v)T_1 + \epsilon_E x_1$ $\quad\Longrightarrow\quad a(v)T_1 + \epsilon_E x_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a(v)T_2$

D' altra parte, da considerazione geometriche sui grafici spazio-temporali della situazione descritta sopra come vista da Σ, si ricava che

$$x_1 = b(v)(X_1 - vT_1) \tag{A.7a}$$

$$X_1 = T_1 \qquad \text{equazione propagazione luce da } A \text{ a } B \tag{A.7b}$$

$$X_2 = vT_2 \qquad \text{moto dell' orologio in } A \tag{A.7c}$$

$$X_1 - X_2 = T_2 - T_1 \qquad \text{equazione retta di progagazione luce da } B \text{ a } A \tag{A.7d}$$

si ha dunque che

$a(v)T_1 + \epsilon_E(1-v)T_1 = \dfrac{1}{2}a(v)\dfrac{X_2}{v}$ ma dalla A.7d si ha che

$X_2 = X_1 - T_2 + T_1 = T_1 + T_1 - \dfrac{X_2}{v} \Longrightarrow \dfrac{1+v}{v}X_2 = 2T_1 \Longrightarrow X_2 = \dfrac{2v}{1-v}T_1$

e sostituita sopra

$a(v)T_1 + \epsilon_E b(v)(1-v)T_1 = \dfrac{v}{1+v}T_1 a(v)$ da cui si ottiene la 2.6 che riscriviamo

$$\epsilon_E(v) = -\frac{v}{1-v^2}\frac{a(v)}{b(v)} \tag{A.8}$$

La relazione di ugualianza 2.8 viene fuori dalla 2.7 tramite una semplice integrazione infatti

$\epsilon_E = -\dfrac{va(v)}{b(v)(1-v^2)} = \epsilon_T = \dfrac{1}{b(v)}\dfrac{\mathrm{d}a(v)}{\mathrm{d}v} \Longrightarrow \dfrac{\mathrm{d\,a(v)}}{a(v)} = \dfrac{v}{1-v^2}\,\mathrm{d\,v}$ e integrando

$\ln a(v) = \dfrac{1}{2}\ln(1-v^2)$ da cui proprio la 2.8.

A.1.2 Modello tridimensionale

Mostriamo innanzitutto alcuni calcoli non propriamente banali relativi alle formule 2.19 e 2.18 iniziando proprio da quest' ultima. La prima componente è banale in quanto ricalca completamente il calcolo unidimensionale. Mostriamo invece l' annullarsi delle altre due componenti, per esempio per la componente lungo l' asse y che è comunque, come ragionamento, identico a quella lungo l' asse z. Per il moto dell' orologio di sincrionizzazione lungo l' asse y si ha che

$y = ut \Longrightarrow Y = \dfrac{uT}{d}$ ma lungo y si ha che

$t = aT + \epsilon_2 y = aT + \epsilon ut$ e dunque $t = \dfrac{a}{1-\epsilon_2 ut}T$ e sostituendo

$$Y = \frac{u}{d}\frac{a}{1-\epsilon_2 ut}T \simeq \frac{1}{d}(au)T = wT, \qquad w \stackrel{\text{def}}{=} \frac{au}{d} \tag{A.9}$$

ove si è utilizzata la relazione di approssimazione A.1. Continuando a seguire la falsa riga del modello unidimensionale sui ha che per S' solidale con l' orologio $t'|_{x'=0,y'=0,z'=0} = a(w)T$ e richiedendo che $t' = t$ si ha che

$a(w)T = a(v)T + \epsilon_2 y = a(v)T + \epsilon_2 d(v)Y = a(v)T + \epsilon_2 d(v)wT$ e dunque

$\epsilon_2 = \dfrac{a(w)-a(v)}{d(v)w}$ e utilizzando la A.9 si ha che

$$\epsilon_2 = \frac{a(w)-a(v)}{d(v)}\frac{d(v)}{a(v)u} = \frac{a(w)-a(v)}{a(v)u} = \frac{a(w)}{a(v)u} - \frac{1}{u}$$

ma, come per il caso unidimensionale, quando $w \simeq v \implies \frac{a(w)}{a(v)} \simeq 1$ e dunque la componente sull' asse y del vettore $\vec{\epsilon}$ si annulla. Identiche considerazioni portano ad annulare anche la componente lungo z e ciò prova la 2.18.

Analizzando invece la situazione per S_T si trova analogamente che la prima componente è ovviamente verificata dal metodo unidimensionale sopra introdotto e che anche le altre due componenti della 2.19 sono semplicemente verificate seguendo il metodo tracciato dal caso unidimensionale.

Mostriamo ora l' ugualianza delle 2.21 con le 2.17 e in particolare la 2.21b con le relative componenti spaziali della 2.17 in quanto la componente temporale mi sembra banalmente verificata sviluppando il prodotto vettoriale. Proiettiamo allora la 2.21b lungo l' asse x

$\vec{x}\cdot\hat{x} = d\vec{X}\cdot\hat{x} + \dfrac{b-d}{v^2}(\vec{v}\cdot\hat{x})(\vec{v}\cdot\vec{X}) - b\vec{v}\cdot\hat{x}T$ ma $\hat{x} \equiv \hat{X}$ e dunque

$$x = dX + \frac{b-d}{v^2}v * vX - bvT = dX - bX - dX - bvt = b(X - vT)$$

che è la 2.17b mentre lungo y (e lungo z)

$$\vec{x}\cdot\hat{y} = d\vec{X}\cdot\hat{y} + \frac{b-d}{v^2}(\vec{v}\cdot\hat{y})(vX) - b\vec{v}\cdot\hat{y}T$$

ed essendo $\vec{v} \parallel \hat{x}$ ciò dimostra l' ugualianza con la 2.17b.

Passiamo ora alla parte più difficoltosa della sezione 2.2.3 ossia quella che porta alla 2.22 fino a giungere alle 2.24 e 2.23. Come gia accennato nella sezione 2.2.3, per ottenere la 2.22 è necessario invertire le 2.17 e trasformare il cono di luce $X^2 + Y^2 - c^2T^2 = 0$ in S in relazione anche all' angolo θ. Questo è ciò che ci apprestiamo a fare iniziando scrivendo le 2.17 nella loro forma inversa[1]

$$t = \frac{ct - \epsilon_1 x - \epsilon_2 x - \epsilon_2 z}{a} \tag{A.10a}$$

$$X = \frac{x}{b} + \frac{v(ct - \epsilon_1 x - \epsilon_2 y - \epsilon_2 z)}{a} \tag{A.10b}$$

$$Y = \frac{y}{d} \tag{A.10c}$$

$$Z = \frac{z}{d} \tag{A.10d}$$

ove si è supposta una totale simmetria tra l' asse delle y e l' asse delle z in modo da poter porre $\epsilon_3 = \epsilon_2$. Si supponga, senza perdita di generalita in quanto implica solo una rotazione opportuna del sistema Σ (e dunque del sistema S), che il fascio luminoso di cui si vuole calcolare la velocità della luce sia situato su solo piano XY cosi che l' equazione del cono di luce a cui esso appartiene sia

$$X^2 + Y^2 - c^2 T^2 = 0 \tag{A.11}$$

Nella A.11 e nella A.10 ci si accorge che si è reintrodotta la costante c ossia si è eliminato il fattore di scala che rendeva $c = 1$ nel sistema Σ in modo da calcolare c con il giusto fattore di scala.

[1] I calcoli relativi alla 2.22 sono stati sviluppati utilizzando *Mathematica*® in quanto essi risultavano sufficientemente lunghi e tediosi, nonostante la loro globale semplicità algebrica, da essere inutile imbarcarsi nel loro approccio manuale. I risultati sono ottenuti tramite il seguente notebook di *Mathematica*®

```
Solve[{c*t==a*T+e*x+e2*(y+z),x==b*(X-v*T),y==d*Y,z==d*Z},{T,X,Y,Z}]
X^2+Y^2-c^2*T^2 .  %
%  .  {x->c*t*Cos[theta],y->c*t*Sin[theta],z->c*t*Sin[theta]}
Together[%]
Collect[%,t]
% .  t->1
Collect[%,c]
% .  {c^2->1,c^4->m^2}
Solve[%==0,m]
%[[2,1,2]] .  {a->1+alpha*v^2,e2->0}
% .  {b->1,d->1,e->2*alpha*v}
Series[%,{v,0,1}]
Normal[%]
Simplify[%]
%15[[2,1,2]] /.  {e->-a*v(b(1-v^2)),e2->0}
% //.  {b->1+beta*v^2,d->1+delta*v^2,a->1+alpha*v^2}
Series[1%,{v,0,2}]
Normal[%]
Simplify[%]
% .  Cos[2*theta] -> 1-2*Sin[theta]^2
Factor[%]
ExpandAll[%]
```

Applicando le A.10 nell' equazione del cono di luce A.11 trasformando ossia il cono di luce come visto in Σ nel cono di luce come visto in S si ha che

$$\frac{y^2}{d^2} - \frac{c^2\,(c\,t - e\,x - e2\,y - e2\,z)^2}{a^2} + \left(\frac{x}{b} + \frac{v\,(c\,t - e\,x - e2\,y - e2\,z)}{a}\right)^2 = 0 \tag{A.12}$$

Ora, detto con θ l' angolo con cui viene visto propagarsi il raggio di luce in S si ha che, per esso, valgono le usuali relazioni trigonometriche

$$x = ct\cos(\theta) \tag{A.13a}$$
$$y = ct\sin(\theta) \tag{A.13b}$$
$$z = 0 \tag{A.13c}$$

e sostituite nella A.12 si ha che

$$\frac{c^2t^2\sin^2(\theta)}{d^2} - \frac{c^2(ct - c\epsilon_1 t\cos(\theta) - c\epsilon_2 t\sin^2(\theta)}{a^2} + \left(\frac{ct\cos(\theta)}{b} + \frac{v(ct - c\epsilon_1 t\cos(\theta) - c\epsilon_2 t\sin(\theta))}{a}\right) = 0 \tag{A.14}$$

Ora, raccogliendo t

$$t^2\left(-\frac{c^4}{a^2} + \frac{c^2\,v^2}{a^2} + \frac{2\,c^4\,\epsilon_1\,\cos(\theta)}{a^2} + \frac{2\,c^2\,v\,\cos(\theta)}{a\,b} - \frac{2\,c^2\,\epsilon_1\,v^2\,\cos(\theta)}{a^2} + \right.$$
$$+\frac{c^2\cos(\theta)^2}{b^2} - \frac{c^4\,{\epsilon_1}^2\cos(\theta)^2}{a^2} - \frac{2\,c^2\,\epsilon_1\,v\cos(\theta)^2}{a\,b} + \frac{c^2\,{\epsilon_1}^2\,v^2\cos(\theta)^2}{a^2} +$$
$$+\frac{2\,c^4\,\epsilon_2\,\sin(\theta)}{a^2} - \frac{2\,c^2\,\epsilon_2\,v^2\,\sin(\theta)}{a^2} - \frac{2\,c^4\,\epsilon_1\,\epsilon 2\,\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{a^2} -$$
$$-\frac{2\,c^2\,\epsilon 2\,v\,\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{a\,b} + \frac{2\,c^2\,\epsilon 1\,\epsilon_2\,v^2\,\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{a^2} + \frac{c^2\sin(\theta)^2}{d^2} -$$
$$\left.-\frac{c^4\,{\epsilon_2}^2\sin(\theta)^2}{a^2} + \frac{c^2\,{\epsilon_2}^2\,v^2\sin(\theta)^2}{a^2}\right) = 0 \tag{A.15}$$

ci si accorge che esso e semplificabile e dunque l' equazione restante non contiene alcun termine con coefficienti spazio-temporali e dunque c è indipendente dalla posizione di lettura e dall' istante ma dipende solo dalla velocità di S rispetto a Σ e dalla direzione rispetto alla direzione privilegiata di S $\vec{v}$.

Continuando con i nostri calcoli e raccogliendo c

$$c^4 \left(-a^{-2} + \frac{2\,\epsilon 1\ \cos(\theta)}{a^2} - \frac{{\epsilon_1}^2 \cos(\theta)^2}{a^2} + \frac{2\,\epsilon_2\ \sin(\theta)}{a^2} - \frac{2\,\epsilon_1\,\epsilon_2\ \cos(\theta)\ \sin(\theta)}{a^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{{\epsilon_2}^2 \sin(\theta)^2}{a^2}\right) + c^2 \left(\frac{v^2}{a^2} + \frac{2\,v\ \cos(\theta)}{a\,b} - \frac{2\,\epsilon_1\,v^2\ \cos(\theta)}{a^2} + \frac{\cos(\theta)^2}{b^2} - \right.$$
$$-\frac{2\,\epsilon_1\,v \cos(\theta)^2}{a\,b} + \frac{{\epsilon_1}^2\,v^2 \cos(\theta)^2}{a^2} - \frac{2\,\epsilon_2\,v^2\ \sin(\theta)}{a^2} - \frac{2\,\epsilon_2\,v\ \cos(\theta)\ \sin(\theta)}{a\,b} +$$
$$\left. + \frac{2\,\epsilon_1\,\epsilon_2\,v^2\ \cos(\theta)\ \sin(\theta)}{a^2} + \frac{\sin(\theta)^2}{d^2} + \frac{{\epsilon_2}^2\,v^2 \sin(\theta)^2}{a^2}\right) = 0 \tag{A.16}$$

ci si accorge che in realtà l' equazione risulta essere di secondo grado senza il termine in primo e soddisfa a due soluzioni di cui una negativa, da scartare, e una positiva che è il risultato cercato. Risolvendo dunque rispetto a c e trattenendo il solo termine positivo si ha che

$$\begin{aligned} c(\theta) \ = \ & (1 - 2\,\epsilon_1\ \cos(\theta) + {\epsilon_1}^2 \cos(\theta)^2 - 2\,\epsilon_2\ \sin(\theta) + 2\,\epsilon_1\,\epsilon_2\ \cos(\theta)\ \sin(\theta) + \\ & + {\epsilon_2}^2 \sin(\theta)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(v^2 + \frac{2\,a\,v\ \cos(\theta)}{b} - 2\,\epsilon_1\,v^2\ \cos(\theta) + \frac{a^2 \cos(\theta)^2}{b^2} - \right. \\ & - \frac{2\,a\,\epsilon_1\,v \cos(\theta)^2}{b} + {\epsilon_1}^2\,v^2 \cos(\theta)^2 - 2\,\epsilon_2\,v^2\ \sin(\theta) - \frac{2\,a\,\epsilon_2\,v\ \cos(\theta)\ \sin(\theta)}{b} + \\ & \left. + 2\,\epsilon_1\,\epsilon_2\,v^2\ \cos(\theta)\ \sin(\theta) + \frac{a^2 \sin(\theta)^2}{d^2} + {\epsilon_2}^2\,v^2 \sin(\theta)^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{A.17}$$

La A.17 è l' espressione più generale per la *one-way light velocity* in quanto non è stata ancora specificata la metodologia di sincronizzazione degli orologi nella nostra teoria. Andiamo a specializzarla iniziando dal caso di S_T. Si ha allora che, sostituendo a $\epsilon_2 = 0$, a $b = d = 1$ e sviluppando a in serie di v^2 come

$$a = 1 + \alpha v^2 + o(v^2) \tag{A.18}$$

da cui $\epsilon_1 = 2\alpha v$ si ha che la A.17 diventa

$$c \ = \ \frac{\sqrt{v^2 - 4\,\alpha\,v^3\ \cos(\theta) + 2\,v\ (1 + \alpha\,v^2)\ \cos(\theta) + 4\,\alpha^2\,v^4 \cos(\theta)^2 -}}{\dfrac{\overline{-4\,\alpha\,v^2\ (1 + \alpha\,v^2)\ \cos(\theta)^2 + (1 + \alpha\,v^2)^2 \cos(\theta)^2 + (1 + \alpha\,v^2)^2 \sin(\theta)^2}}{\sqrt{(-1 + 2\,\alpha\,v\ \cos(\theta))^2}}} \tag{A.19}$$

che, sviluppata in serie di v al primo ordine da che

$$c = \sqrt{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} + \left(\frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2}} + 2\,\alpha\,\cos(\theta)\,\sqrt{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \right) v \tag{A.20}$$

e si può vedere che non esistono termini al secondo ordine in v. Semplificando si ottiene proprio la 2.24 che qui riscriviamo

$$c(\theta) = 1 + (1 + 2\alpha) v\,\cos(\theta) \tag{A.21}$$

Passando al calcolo nel caso di S_E si ha che, sostituendo nella A.17 $\epsilon_2 = 0$, inserendo per ϵ_1 il valore trovato nella 2.19 e sviluppando a, b e d in serie di v^2 come

$$\begin{aligned} a &= 1 + \alpha v^2 + \mathrm{O}(v^2) && \text{(A.22a)} \\ b &= 1 + \beta v^2 + \mathrm{O}(v^2) && \text{(A.22b)} \\ d &= 1 + \delta v^2 + \mathrm{O}(v^2) && \text{(A.22c)} \end{aligned}$$

si ha che per il reciproco della c

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \;=\; & \left(1 + \frac{2\,v\,(1+\alpha\,v^2)\,\cos(\theta)}{(1-v^2)\,(1+\beta\,v^2)} + \frac{v^2\,(1+\alpha\,v^2)^2\cos(\theta)^2}{(1-v^2)^2\,(1+\beta\,v^2)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \big(v^2 + \\ & + \frac{2\,v\,(1+\alpha\,v^2)\,\cos(\theta)}{1+\beta\,v^2} + \frac{2\,v^3\,(1+\alpha\,v^2)\,\cos(\theta)}{(1-v^2)\,(1+\beta\,v^2)} + \\ & + \frac{(1+\alpha\,v^2)^2\cos(\theta)^2}{(1+\beta\,v^2)^2} + \frac{v^4\,(1+\alpha\,v^2)^2\cos(\theta)^2}{(1-v^2)^2\,(1+\beta\,v^2)^2} + \\ & + \frac{2\,v^2\,(1+\alpha\,v^2)^2\cos(\theta)^2}{(1-v^2)\,(1+\beta\,v^2)^2} + \frac{(1+\alpha\,v^2)^2\sin(\theta)^2}{(1+\delta\,v^2)^2} \Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{A.23}$$

e sviluppando in serie di v fino al secondo grado si ha che

$$\begin{aligned} c \;=\; & \frac{1}{\sqrt{\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2}} - \left(\frac{\cos(\theta)}{\left(\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2}} \right) v - \\ & - \left(\frac{\cos(\theta)^2}{\left(\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \right. \\ & \left. - \frac{\frac{3\cos(\theta)^2}{\left(\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2\right)^2} - \frac{1+2\cos(\theta)^2+(2\,\alpha-2\,\beta)\cos(\theta)^2+(2\,\alpha-2\,\delta)\sin(\theta)^2}{\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2}}{2\sqrt{\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2}} \right) v^2 \end{aligned} \tag{A.24}$$

e semplificando le espressioni trigonometriche si ottiene proprio la 2.24 che qui riscriviamo

$$c(\theta) = 1 - (1 + \alpha - \beta)\, v^2 + (\tfrac{1}{2} - \beta + \delta)\, v^2 \, \sin^2(\theta) \tag{A.25}$$

Bibliografia

[1] Lorentz, Einstein e Minkowski, *Das Relativitátsprinzie* (Darmstadt 1958).

[2] Mansouri R. e Sexl R. U., (1977). *Gen. Rel. and Grav.*,8, pp. 497-513.

[3] Eddington, A.S. (1924) *The Matematical Teory of Relativity*, Cambrige University Press, Cambridge U.K.

[4] T.P. Krisher *et al.* (1990), Pysical RevD, Vol. 42,2 pp731-734