

Capitolo I

Anomalie quantistiche

I.1 Anomalie quantistiche

I.1.1 Introduzione

Molto spesso, in meccanica quantistica, si è soliti costruire una azione che risulta invariante sotto alcune leggi della natura che vengono determinate dagli esperimenti. Questo programma ci porta a descrivere con successo le interazioni fondamentali.

Ma noi sappiamo bene che una trattazione completa non può fermarsi alla sola scrittura dell'azione ma deve giungere all'elaborazione dell'integrale di cammino di Feynmann. Tale passaggio può essere così riassunto

- costruzione dell'azione;
- esponenziazione dell'azione;
- sua integrazione funzionale.

Ora, dal punto di vista classico tale procedura è molto naturale e ben definita ma può portare a brutte conseguenze se non attentamente ponderata. Si è costruita l'azione in modo che rifletta alcune simmetrie della natura ma si è preso per buono che si possa integrare su di essa in modo consistente con queste simmetrie.

Per esempio, nel caso delle teorie di Gauge, per evitare i problemi ora menzionati, si è dovuto fare ricorso a piccoli aggiustamenti definendo l'integrale modulo le condizioni di gauge eliminando le altre fisicamente equivalenti. In tale caso siamo stati aiutati dall'introduzione di nuovi gradi di libertà, i fantasmi di Faddeev-Popov, che hanno messo in evidenza le integrazioni in sovrannumero permettendo di conglobarle nella costante di normalizzazione. Questo miracolo è avvenuto grazie al pagamento del modesto prezzo della perdita delle simmetrie iniziali dell'azione e alla loro conglobazione nelle più generiche BRS che diventano le simmetrie dell'F.P.I.

Analogamente, nello studio della teoria $\lambda\Phi^4$ e di Yang-Mills si vede che, per rendere la teoria finita, si deve introdurre un parametro di scala μ anche se la teoria classica di

partenza è *massless*. Ciò comporta che, mentre l'azione è invariante per trasformazioni di scala, l'integrale di Feynmann deve perdere tale simmetria per rendere la teoria finita.

DEF. ANOMALO: Si dice che un operatore di simmetria è anomalo se esso risulta una simmetria esatta per l'azione classica che però non viene preservata come simmetria nell'F.P.I.

È ovvio però che tale definizione è antropica nel senso che la natura non possiede il limite classico ma è utile in quanto, per i fisici, la costruzione di un integrale di cammino parte proprio da tale limite e risulta perciò un concetto molto importante per la comprensione della meccanica quantistica.

La presenza di anomalie ha conseguenze fisiche molto importanti. Di esse se ne possono distinguere sostanzialmente due tipi:

- quando l'anomalia non è necessaria a stabilire la rinormalizzabilità della teoria ossia quando la simmetria anomala è globale allora essa contribuisce in modo finito al processo fisico. Esempi sono il calcolo del tempo di decadimento del processo $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ o il ben più importante *asymptotic freedom* nella QCD. È proprio a causa dell'anomalia nell'invarianza di scala classica che porta alla variazione di g con la scala e dunque alla *asymptotic freedom*. Questa classe di anomalie sono per così dire delle “buone” anomalie;
- quando invece le anomalie affliggono delle simmetrie necessarie alla rinormalizzazione della teoria esse sono “cattive” anomalie in quanto la loro presenza distrugge la possibilità di costruire un integrale di cammino con valore finito. In quattro dimensioni la sola anomalia in tal senso è quella chirale di Gauge sui fermioni

Ma che cosa può andare male nel processo di integrazione dell'azione di modo che da una S_{cl} invariante sotto un operatore di simmetria il corrispondente integrale di cammino venga a perdere tale simmetria?

I problemi possono nascere o nella misura di integrazione o nella specificazione delle condizioni al contorno. Ovviamente può anche accadere che l'integrale di cammino semplicemente non esista. A quest'ultimo caso corrispondono molto probabilmente quelle anomalie cattive che rendono la teoria non rinormalizzabile.

Al caso delle condizioni al contorno corrispondono le anomalie così dette globali. Un esempio può essere il caso in cui l'integrale di cammino, a causa delle condizioni al contorno, valga zero. Questo caso è ben conosciuto nelle normali integrazioni. Se l'integrando è antisimmetrico sotto parità l'integrale varrà zero se gli estremi di integrazione sono su di un intervallo simmetrico. Interessiamoci invece del primo caso.

I.1.2 Le simmetrie interne

Richiamiamo i tipi di simmetrie usuali per la meccanica quantistica. Dapprima abbiamo le simmetrie spazio-temporali come le traslazioni, le trasformazioni di Lorentz, le dilatazioni e le simmetrie conformi. Per esempio l'azione della teoria di Maxwell è invariante sotto un gruppo a quindici parametri che include tutte le *asymptotic freedom* simmetrie.

Come si è poi visto nello studio della teoria $\lambda\Phi^4$ e nelle teorie di gauge l' invarianza di scala viene rotta dalla necessità di rinormalizzare la teoria tramite un parametro di massa μ . Il risultato di tale anomalie è la dipendenza della costante di accoppiamento dalla scala.

Ci sono ovviamente altri tipi di simmetrie: le simmetrie interne. Consideriamo la Q.E.D. di un fermione di Dirac $\psi \in (\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2})$ interagente con un potenziale elettromagnetico A_μ agente come sorgente esterna. La sua azione è data da

$$S = \int d^4x \bar{\psi}(\not{D} + im)\psi \quad (\text{I.1})$$

dove

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu, \quad \not{D} = \gamma^\mu D_\mu.$$

La S risulta invariante sotto la trasformazione globale di fase

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\lambda}\psi(x) \quad (\text{I.2})$$

e, utilizzando il teorema di Noether questa porta immediatamente ad una corrente

$$j_\mu = i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad (\text{I.3})$$

conservata ossia tale che $\partial_\mu j^\mu = 0$.

I.1.3 La simmetria chiriale e la sua anomalia

Un'altra simmetria di S nel limite di massa nulla è la simmetria chiriale globale

$$\psi(x) \longrightarrow \mathcal{L}\psi'(x) = e^{i\beta\gamma_5}\psi(x) \quad (\text{I.4})$$

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma_0 \longrightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{i\beta\gamma_5} \quad (\text{I.5})$$

la cui semplice applicazione del solito teorema di Noether

$$j_\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial^\mu\psi} \frac{\delta\psi}{\delta\beta} \quad (\text{I.6})$$

porta a una corrente

$$j_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma_\mu(i\gamma_5\psi) = i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \quad (\text{I.7})$$

la cui divergenza può essere calcolata utilizzando la variazione di S infatti

$$\begin{aligned} S' &= \int d^4x \bar{\psi}[(\partial_\mu + iA_\mu)\gamma^\mu + im]\psi' = \int d^4x \bar{\psi}e^{-i\beta\gamma_5}[(\partial_\mu + iA_\mu)\gamma^\mu + im]e^{i\beta\gamma_5}\psi \simeq \\ &\simeq \int d^4x \bar{\psi}[(I + i\beta\gamma_5)[(\partial_\mu + iA_\mu)\gamma^\mu + im](I + i\beta\gamma_5)\psi = \\ &= \int d^4x \bar{\psi}[(\partial_\mu + iA_\mu)\gamma^\mu]\psi + \int d^4x \bar{\psi}i\beta\gamma_5[(\partial_\mu + iA_\mu)\gamma^\mu + im]\psi + \bar{\psi}[(\partial_\mu + iA_\mu)\gamma^\mu + \\ &\quad + im]i\beta\gamma_5\psi = \\ &= S + \int d^4x (\bar{\psi}i\beta\gamma_5\partial_\mu\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu i\beta\gamma_5\psi + \bar{\psi}\beta\gamma_5 A_\mu\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}A_\mu\gamma^\mu\beta\gamma_5\psi - \bar{\psi}\beta\gamma_5\psi - \\ &\quad - \bar{\psi}\beta\gamma_5\psi) = \\ &= S + \int d^4x (i\bar{\psi}\beta\gamma_5\partial_\mu\gamma^\mu + i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\beta\gamma_5\psi - 2\beta\bar{\psi}\gamma_5\psi) \end{aligned}$$

e integrando per parti e considerando la trasformazione chiriale come locale ossia con $\beta = \beta(x)$ allora

$$S' = S + \int d^4x \left\{ i\beta [\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\gamma_5\psi] - 2\beta\bar{\psi}\gamma_5\psi \right\} = S + \int d^4x \beta [-i\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\psi -$$

$$- i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\gamma_5\psi - 2\bar{\psi}\gamma_5\psi] = S + \int d^4x \beta(x) [-i\partial^\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi) - 2m\bar{\psi}\gamma_5\psi]$$

ma $\delta S = 0$ e dunque

$$\partial^\mu(i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi) = \partial^\mu j_\mu^5(x) = -2m\bar{\psi}\gamma_5\psi \quad (\text{I.8})$$

o, nel limite di massa nulla

$$\partial^\mu j_\mu^5 = 0, \quad m = 0. \quad (\text{I.9})$$

Ciò che vogliamo verificare ora è la conservazione di j_μ e di j_μ^5 in presenza di correzioni radioattive. Nessun problema ci viene da j^μ perché dopo tutto esso è la corrente elettrica che noi sappiamo essere conservata.

Per quanto riguarda invece la corrente chiriale è stato dimostrato da Adler [1], Bell e Jackiw [2] che la sua conservazione non è verificata ordini $\hbar$. A questa anomalia è la famosa “ABJ chiral anomaly”.

I diagrammi contenenti vertici $\gamma_\mu\gamma_5$ nell'elettrodinamica degli spinori è di particolare interesse a causa delle sue molteplici connessioni. Ciò che si vuole fare è mostrare che i diagrammi della corrente chiriale hanno proprietà anomale che si differenziano da quelle trovate dalla manipolazione formale dell'equazione dei campi. In particolare, a causa della presenza del diagramma a triangolo, la divergenza della corrente assiale non sarà l'usuale espressione sopra calcolata e j^μ non soddisferà più l'usuale Ward identity. Questo presenterà una connessione molto forte con alcuni processi fisici quali i già citato tempo di decadimento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$.

Utilizzando un procedimento introdotto da Fujikawa [3] basato sull'utilizzo della funzione ζ mostriamo che l'extra fattore anomalo proviene dal fatto che l'elemento di misura funzionale non è invariante sotto trasformazioni chiriali.

L'integrale di percorso

$$e^{-Z[A]} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^+ e^{-S[\psi, \psi^+, A_\mu]} \quad (\text{I.10})$$

dove S è definita nella I.1, può essere formalmente integrata come

$$e^{-Z[A]} = \det[\gamma_\mu(\partial_\mu + iA_\mu) + im]l. \quad (\text{I.11})$$

Cosa accade ora a tale integrale di percorso quando si opera una trasformazione chiriale. Già sappiamo che S è invariante se β è una variabile globale e $m = 0$ ma cosa succede all'elemento di misura $\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\psi^+$? È ovvio che esso varierà come

$$\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\psi^+ \longrightarrow \mathcal{D}\psi'\mathcal{D}\psi'^+ = J[\beta]\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\psi^+$$

dove $J[\beta]$ è lo jacobiano della trasformazione chirale. Ciò che si deve fare allora è calcolare questo jacobiano.

D' altra parte, ψ e ψ^+ sono variabili d' integrazione per cui l' F.P.I. deve rimanere inalterato formalmente se a ψ e a ψ^+ si sostituisce ψ' e ψ'^+ ossia, in particolare, se ψ e ψ^+ variano per una trasformazione chirale infinitesima

$$\psi'(x) = \psi(x) + i\beta(x)\gamma_5\psi(x) \quad (\text{I.12})$$

deve essere che

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^+ m^{-S[\psi, \psi^+, A_\mu]} = \int \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\psi'^+ e^{-S[\psi', \psi'^+, A_\mu]} = \int \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\psi'^+ e^{-S'[\psi, \psi^+, A_\mu]} \quad (\text{I.13})$$

dove S' denota l' azione trasformata dalla trasformazione chirale, che già sappiamo essere

$$S' = S + \int d^4x \beta(x) [-i\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) - 2m \bar{\psi} \gamma_5 \psi]. \quad (\text{I.14})$$

Ma allora l' integrale di cammino a destra della I.13 può essere formalmente integrata nell' euclideo come

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\psi'^+ e^{-S[\psi, \psi^+, A_\mu]} &= \int J[\beta] \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^+ e^{-S[\psi, \psi^+, A_\mu]} = \\ &= J[\beta] \det[\gamma_\mu(\partial_\mu + iA_\mu) + im - i\beta\partial_\mu \gamma_\mu \gamma_5 - 2m\beta\gamma_5] \end{aligned}$$

da cui

$$\det[\gamma_\mu(\partial_\mu + iA_\mu) + im] = J[\beta] \det[\gamma_\mu(\partial_\mu + iA_\mu) + im - i\beta\partial_\mu \gamma_\mu \gamma_5 - 2m\beta\gamma_5]. \quad (\text{I.15})$$

Per prudenza moltiplichiamo ora tale espressione con l' analoga in cui si è scambiata $m \rightarrow -m$ in modo da dover trattare con determinanti di operatori ellittici con i quali la tecnica della funzione ζ riesce meglio, ossia utilizziamo la

$$\begin{aligned} \det[(\mathcal{D} + im)(\mathcal{D} - im)] &= J^2[\beta] \det[(\mathcal{D} + im - i\beta\partial_\mu \gamma_\mu \gamma_5 - 2m\beta\gamma_5)(\mathcal{D} - im - i\beta\partial_\mu \gamma_\mu \gamma_5 + \\ &\quad + 2m\beta\gamma_5)] \\ \det[\mathcal{D}^2 + m^2] &= J^2[\beta] \det[\mathcal{D}^2 + m^2 - i\beta\partial_\mu \gamma_\mu \gamma_5 \mathcal{D} + \mathcal{D} i\beta\partial_\mu \gamma_\mu \gamma_5 - 2m^2 i\beta\gamma_5 + 2m\mathcal{D} \beta\gamma_5 + \\ &\quad + 2m^2 i\beta\gamma_5 - 2m\beta\gamma_5 \mathcal{D} + o(\beta^2)] \\ &= J^2[\beta] \det[\mathcal{D}^2 + m^2 - \{\mathcal{D}, i\beta\partial_\mu \gamma_\mu \gamma_5\} + 2m\mathcal{D} \beta\gamma_5 + 2m\beta\mathcal{D} \gamma_5 + \\ &\quad + 4m^2 i\beta\gamma_5 + o(\beta^2)] = \\ &= J^2[\beta] \det[\mathcal{D}^2 + m^2 - \{\mathcal{D}, i\beta\partial_\mu \gamma_\mu \gamma_5\} + 2m\{\mathcal{D}, \beta\}\gamma_5 + 4m^2 i\beta\gamma_5 + o(\beta^2)] \end{aligned}$$

e detto con

$$\delta K = -\{\mathcal{D}, i\beta\partial_\mu \gamma_\mu \gamma_5\} + 2m\{\mathcal{D}, \beta\}\gamma_5 + 4m^2 i\beta\gamma_5 + o(\beta^2) \quad (\text{I.16})$$

si ha che una soluzione formale per $J^2[\beta]$ risulta

$$\boxed{J^2[\beta] = \frac{\det[\mathcal{D}^2 + m^2]}{\det[\mathcal{D}^2 + m^2 + \delta K]}} \quad (\text{I.17})$$

o anche, passando ai logaritmi

$$\boxed{\ln J[\beta] = -\frac{1}{2} \{ \ln \det[\mathcal{D}^2 + m^2 + \delta K] - \ln \det[\mathcal{D}^2 + m^2] \}} \quad (\text{I.18})$$

che, ordine $\beta(x)$ può essere scritto come

$$\ln J[\beta] = -\frac{1}{2} \int d^4x \beta(x) \left\{ \frac{\delta}{\delta \beta(x)} \ln \det[\mathcal{D}^2 + m^2 + \delta K] \right\} \Big|_{\beta=0} \quad (\text{I.19})$$

o anche, ricordando che

$$\ln \det A = - \frac{d}{ds} \zeta_A \Big|_{s=0} \quad (\text{I.20})$$

si ha che

$$\ln J[\beta] = \frac{1}{2} \int d^4x \beta(x) \left\{ \frac{\delta}{\delta \beta(x)} \zeta'_{[\mathcal{D}^2 + m^2 + \delta K]}(0) \right\} \Big|_{\beta=0}. \quad (\text{I.21})$$

Ricordiamo ora alcune cose sulla funzione ζ ; per un ben definito operatore K_x agente su x la ζ_K risulta data da

$$\zeta_K(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \text{Tr} \int d^4x G(x, x, \tau) \quad (\text{I.22})$$

dove la traccia agisce su tutti gli indici di G e G soddisfa la così detta equazione del calore

$$K_x G(x, y, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} G(x, y, \tau), \quad G(x, y, \tau = 0) = \delta(x - y). \quad (\text{I.23})$$

Allora la variazione della ζ_K dovuta ad una variazione dell' operatore K può essere scritta come

$$\delta \zeta_K(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \int d^4x \text{Tr} \delta G(x, x, \tau) \quad (\text{I.24})$$

dove ora la $\delta G(x, y, \tau)$ soddisfa l' equazione del calore inomogenea ottenuta differenziando l' omogenea come

$$\delta \{ K_x G(x, y, \tau) \} = \delta K_x G(x, y, \tau) + K_x \delta G(x, y, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \delta G(x, y, \tau) \quad \text{ossia la}$$

$$\left(K_x + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \delta G(x, y, \tau) = -\delta K_x G(x, y, \tau), \quad \delta G(x, y, \tau = 0) = 0. \quad (\text{I.25})$$

Per sostituzione si può vedere che una soluzione per la I.25 risulta

$$\delta G(x, y, \tau) = - \int d^4z \int_0^\tau d\tau' G(x, z, \tau' - \tau) \delta K_z G(z, y, \tau') \quad (\text{I.26})$$

infatti differenziando rispetto a τ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau} \delta G(x, y, \tau) &= - \int d^4 z \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int_0^\tau d\tau' G(x, z, \tau' - \tau) \delta K_z G(z, y, \tau') \right) - \\
&\quad - \int d^4 z \int_0^\tau d\tau' \frac{\partial}{\partial \tau} G(x, z, \tau' - \tau) \delta G(z, y, \tau') = \\
&= - \int d^4 z G(x, z, \tau' - \tau) \delta K_z G(z, y, \tau') \Big|_{\tau'=\tau} - \\
&\quad - \int d^4 z \int_0^\tau d\tau' K_x G(x, z, \tau' - \tau) \delta K_z G(z, y, \tau') = \\
&= - \int d^4 z \delta(x - z) \delta K_z G(z, y, \tau) - K_x \delta G(x, y, \tau) = \\
&= - \delta K_x G(x, y, \tau) - K_x \delta G(x, y, \tau)
\end{aligned}$$

da cui la I.25.

D' altra parte esiste un modo per costruire la $G(x, y, \tau)$ dagli autovalori dell' operatore K_x [4] infatti detta con $\{f_n(x)\}$ una base delle soluzioni di K_x con λ_n come autovalore ossia tale che

$$K_x f_n(x) = \lambda_n f_n(x) \quad (\text{I.27})$$

$$\int d^4 x f_n^+(x) f_m(x) = \delta_{nm} \quad (\text{I.28})$$

si ha che la

$$G(x, y, \tau) = \sum_n e^{-\lambda_n \tau} f_n(x) f_n^+(y) \quad (\text{I.29})$$

soddisfa proprio la I.23 ma allora

$$\begin{aligned}
\delta \zeta_K(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \int d^4 x \text{Tr} G(x, x, \tau) = \\
&= - \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \int_0^\infty d\tau' \int d^4 x d^4 z \text{Tr} G(x, z, \tau' - \tau) \delta K_z G(z, x, \tau') = \\
&= - \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \int_0^\infty d\tau' \int d^4 x d^4 z \sum_n e^{-\lambda_n(\tau' - \tau)} f_n(x) f_n^+(z) \delta K_z \cdot \\
&\quad \cdot \sum_m e^{-\lambda_m \tau'} f_m(z) f_m^+(x) = \\
&= - \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \int_0^\infty d\tau' \int d^4 x d^4 z \sum_{n,m} e^{\lambda_n \tau} e^{-\tau'(\lambda_n + \lambda_m)} f_n(x) f_n^+(z) \cdot \\
&\quad \cdot \delta K_z f_m(z) f_m^+(x)
\end{aligned}$$

e integrando in $d^4 x$

$$\begin{aligned}
\delta\zeta_K(s) &= -\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \int_0^\infty d\tau' \int d^4z \sum_{n,m} e^{\lambda_n \tau} e^{-\tau'(\lambda_n + \lambda_m)} f_n^+(z) \delta K_z f_m(z) \delta_{n,m} = \\
&= -\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \int_0^\infty d\tau' \int d^4z \sum_n e^{\lambda_n \tau} e^{-2\tau' \lambda_n} f_n^+(z) \delta K_z f_n(z) = \\
&= -\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^s \sum_n e^{-\lambda_n \tau} \int d^4z f_n^+(z) \delta K_z f_n(z)
\end{aligned}$$

e detto con $\lambda_n \tau = \theta \implies \tau = \theta \lambda_n^{-1}$

$$\begin{aligned}
\delta\zeta_K &= -\frac{1}{\Gamma(s)} \sum_n \int_0^\infty \frac{d\theta}{\lambda_n} e^{-\theta} \theta^s \lambda_n^{-s} \int d^4z f_n^+(z) \delta K_z f_n(z) = \\
&= -\frac{1}{\Gamma(s)} \sum_n \int_0^\infty d\theta e^{-\theta} \theta^s \lambda_n^{-s-1} \int d^4z f_n^+(z) \delta K_z f_n(z) = \\
&= -\frac{1}{\Gamma(s)} \Gamma(s+1) \sum_n \lambda_n^{-s-1} \int d^4z f_n^+(z) \delta K_z f_n(z)
\end{aligned}$$

e dunque, infine,

$$\delta\zeta_K = -s \sum_n \lambda_n^{-s-1} \int d^4z f_n^+(z) \delta K_z f_n(z). \quad (\text{I.30})$$

Applichiamo ora questo formalismo al nostro problema. Posto $K = \mathcal{D}^2 + m^2 + \delta K$ con $\delta K_z = \delta K$ si ha che $\zeta_{\mathcal{D}^2 + m^2 + \delta K} = \zeta_{K + \delta K} = \delta\zeta_K$ e dunque

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta\zeta_K(s)}{\delta\beta(x)} \right|_{\beta=0} &= \frac{\delta}{\delta\beta(x)} \left\{ -s \sum_n \lambda_n^{-s-1} \int d^4z f_n^+(z) \delta K_z f_n(z) \right\} \Big|_{\beta=0} = \\
&= \frac{\delta}{\delta\beta(x)} \left\{ -s \sum_n \lambda_n^{-s-1} \int d^4z f_n^+(z) [-\{\mathcal{D}, i\beta \not{\partial} \gamma_5\} + 2m\{\mathcal{D}, \beta\} \gamma_5 + 4im^2 \beta \gamma_5 + \right. \\
&\quad \left. + o(\beta^2)] f_n(z) \right\} \Big|_{\beta=0}
\end{aligned}$$

d'altra parte gli ordini superiori a β nella derivazione danno termini contenenti β che dunque si annullano per $\beta = 0$ per cui possiamo tralasciare gli $o(\beta^2)$ per cui

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta\zeta_K(s)}{\delta\beta(x)} \right|_{\beta=0} &= \frac{\delta}{\delta\beta(x)} \left\{ -s \sum_n \lambda_n^{-s-1} \int d^4z f_n^+(z) [-\mathcal{D} i\beta \not{\partial} \gamma_5 - i\beta \not{\partial} \gamma_5 \mathcal{D} + 2m\mathcal{D} \beta \gamma_5 + \right. \\
&\quad \left. + 2m\beta \mathcal{D} \gamma_5 + 4im^2 \beta \gamma_5] f_n(z) \right\} \Big|_{\beta=0}.
\end{aligned}$$

Ora, ovviamente anche $\mathcal{D}$ è diagonalizzabile sulla stessa base di $\mathcal{D}^2 + m^2$ e siano a_n gli autovalori antihermitiano di $\mathcal{D}$ tale che

$$\mathcal{D} f_n = a_n f_n, \quad f_n^+ \mathcal{D} = f_n^+ a_n, \quad a_n^+ = a_n, \quad a_n^2 = \lambda_n - m^2 \quad (\text{I.31})$$

dove l'ultima delle I.31 proviene dal fatto che

$$(\mathcal{D}^2 + m^2) f_n = \lambda_n f_n \implies \mathcal{D}^2 f_n = a_n^2 f_n = (\lambda_n - m^2) f_n. \quad (\text{I.32})$$

Allora si ha che

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta \zeta_K(s)}{\delta \beta(x)} \right|_{\beta=0} &= \frac{\delta}{\delta \beta(x)} \left\{ -s \sum_n \lambda^{-s-1} \int d^4 z f_n^+(z) [-\not{D} i \beta \not{\partial} \gamma_5 - i \beta \not{\partial} \gamma_5 \not{D} + 2m a_n^+ \beta \gamma_5 - \right. \\
&\quad \left. - 2m \beta \gamma_5 \not{D} + 4im^2 \beta \gamma_5] f_n(z) \right\} \Big|_{\beta=0} = \\
&= \frac{\delta}{\delta \beta(x)} \left\{ -s \sum_n \lambda^{-s-1} \int d^4 z f_n^+(z) [-\not{D} i \beta \not{\partial} \gamma_5 - i \beta \not{\partial} \gamma_5 \not{D} + 2m a_n \beta \gamma_5 - \right. \\
&\quad \left. - 2m \beta \gamma_5 a_n + 4im^2 \beta \gamma_5] f_n(z) \right\} \Big|_{\beta=0} = \\
&= \frac{\delta}{\delta \beta(x)} \left\{ -s \sum_n \lambda^{-s-1} \int d^4 z f_n^+(z) [-\not{D} i \beta \not{\partial} \gamma_5 - i \beta \not{\partial} \gamma_5 \not{D} + 4im^2 \beta \gamma_5] f_n(z) \right\} \Big|_{\beta=0}
\end{aligned}$$

Ciò che facciamo ora è quello di aggiungere e togliere il termine $\not{D} i \beta (i \not{A}) \gamma_5 + i \beta (i \not{A}) \gamma_5 \not{D}$ di modo che

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta \zeta_K(s)}{\delta \beta(x)} \right|_{\beta=0} &= \frac{\delta}{\delta \beta(x)} \left\{ -s \sum_n \lambda^{-s-1} \int d^4 z f_n^+(z) [-\not{D} i \beta \not{\partial} \gamma_5 - i \beta \not{\partial} \gamma_5 \not{D} + 4im^2 \beta \gamma_5 + \right. \\
&\quad \left. + \not{D} i \beta (i \not{A}) \gamma_5 + i \beta (i \not{A}) \gamma_5 \not{D} - \not{D} i \beta (i \not{A}) \gamma_5 - i \beta (i \not{A}) \gamma_5 \not{D}] f_n(z) \right\} \Big|_{\beta=0} = \\
&= \frac{\delta}{\delta \beta(x)} \left\{ -s \sum_n \lambda^{-s-1} \int d^4 z f_n^+(z) [-\not{D} i \beta \not{D} \gamma_5 - i \beta \not{D} \gamma_5 \not{D} + 4im^2 \beta \gamma_5 - \right. \\
&\quad \left. - \not{D} \beta \not{A} \gamma_5 - \beta \gamma \not{A} \gamma_5 \not{D}] f_n(z) \right\} \Big|_{\beta=0}
\end{aligned}$$

e d' altra parte $\not{A}$ è esso stesso diagonalizzabile su f_n ma essendo un operatore antihermitiano allora ¹

$$b_n = -b_n^+ \quad \text{dove } \not{A} f_n = b_n f_n \quad (\text{I.33})$$

e dunque facendolo agire sugli autostati

$$\begin{aligned}
-f_n^+ \not{D} \beta \not{A} \gamma_5 f_n &= f_n^+ \not{D} \beta \gamma_5 \not{A} f_n = b_n f_n^+ \not{D} \beta \gamma_5 f_n = a_n b_n f_n^+ \beta \gamma_5 f_n \\
-f_n^+ \not{A} \beta \gamma_5 \not{D} f_n &= -b_n f_n^+ \beta \gamma_5 \not{D} f_n = -a_n b_n f_n^+ \beta \gamma_5 f_n
\end{aligned}$$

e dunque si elidono a vicenda. Allora si ha che

$$\left. \frac{\delta \zeta_K(s)}{\delta \beta(x)} \right|_{\beta=0} = \frac{\delta}{\delta \beta(x)} \left\{ -s \sum_n \lambda^{-s-1} \int d^4 z f_n^+(z) [-\not{D} i \beta \not{D} \gamma_5 - i \beta \not{D} \gamma_5 \not{D} + \right. \\
\left. + 4im^2 \beta \gamma_5] f_n(z) \right\} \Big|_{\beta=0}$$

¹ Infatti $f_n^+ \not{A} = b_n f_n^+ \implies \not{A}^+ f_n = -\not{A} f_n = b_n^+ f_n$ da cui la I.33

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta \zeta_K(s)}{\delta \beta(x)} \right|_{\beta=0} &= \frac{\delta}{\delta \beta(x)} \left\{ -s \sum_n \lambda^{-s-1} \int d^4 z f_n^+(z) [a_n i \beta \gamma_5 a_n + i \beta \gamma_5 a_n a_n + \right. \\
&\quad \left. + 4im^2 \beta \gamma_5] f_n(z) \right\} \Big|_{\beta=0} = \\
&= -s \sum_n \lambda^{-s-1} \int d^4 z f_n^+(z) \frac{\delta}{\delta \beta(x)} \left\{ \beta(z) [2ia_n^2 + 4im^2] \gamma_5 f_n(z) \right\} \Big|_{\beta=0} = \\
&= -s \sum_n \lambda^{-s-1} \int d^4 z \delta(x-z) (2ia_n^2 + 4im^2) f_n^+(z) \gamma_5 f_n(z) = \\
&= -2is \sum_n \lambda^{-s-1} (a_n^2 + 2m^2) f_n^+(x) \gamma_5 f_n(x)
\end{aligned}$$

e ricorando che $a_n^2 = \lambda_n^2 - m^2$ allora

$$\left. \frac{\delta \zeta_K(s)}{\delta \beta(x)} \right|_{\beta=0} = -2is \sum_n \lambda^{-s-1} (\lambda_n + m^2) f_n^+(x) \gamma_5 f_n(x) \quad (\text{I.34})$$

e inserendo questo risultato nella I.21 si è trovato che

$$\ln J[\beta] = -i \int d^4 x \beta(x) \left\{ \frac{d}{ds} \sum_n s \lambda_n^{-s-1} (\lambda_n + m^2) f_n^+(x) \gamma_5 f_n(x) \right\} \Big|_{s=0}. \quad (\text{I.35})$$

Ciò che rimane da fare ora è calcolare la sommatoria. Ma prima di farlo analizziamo l'espressione $f_n^+ \gamma_5 f_n$. Esso può essere pensato come una sorta di conteggio del numero di autovettori con autovalore nullo (i così detti "zero modes"). Infatti $\forall \lambda_n \neq 0$ esistono due autovettori $f_{n \neq 0} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ e $f'_{n \neq 0} = f_{n \neq 0}^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ a^* \end{pmatrix}$ e nella sommatoria della I.35 per ogni n c'è sia un termine della forma $f_n^+ \gamma_5 f_n$ e sia un termine $f_n'^+ \gamma_5 f_n' = f_n \gamma_5 f_n^+ = f_n^+ \gamma_5^+ f_n = -f_n \gamma_5 f_n$ per cui per ogni $n \neq 0$ i termini si elidono a vicenda.

Gli unici termini non nulli sono proprio quelli corrispondenti all'autovalore nullo per cui tale somma sarà certamente proporzionale a $^2 n_L - n_R$ ossia al numero netto di zero modes.

Calcoliamo dunque la somma

$$C(s) = s \sum_n \lambda_n^{-s-1} (\lambda_n + m^2) f_n^+(x) \gamma_5 f_n(x) \quad (\text{I.36})$$

questa può essere riscritta in forma operatoriale come

$$\begin{aligned}
C(s) &= s \sum_n (\lambda_n^{-s} + \lambda_n - s - 1m^2) f_n^+(x) \gamma_5 f_n(x) = \\
&= s \sum_n [f_n^+(x) \gamma_5 (\not{D}^2 + m^2)^{-s} f_n(x) + m^2 f_n^+(x) \gamma_5 (\not{D}^2 + m^2)^{-s-1} f_n(x)].
\end{aligned}$$

Ora, la sommatoria non è ben definita a causa della $\delta(0)$ introdotta dal prodotto $f_n^+(x) f_n(x)$ e dunque, per eliminare formalmente tale infinito poniamo $\delta(0) = \lim_{x \rightarrow y} \delta(x-y)$ ossia

² n_L =zero modes con chiralità left e n_R =zero modes con chiralità right

$$\begin{aligned}
C(s) &= \lim_{x \rightarrow y} s \sum_n [f_n^+(y) \gamma_5 (\not{D}^2 + m^2)^{-s} f_n(x) + m^2 f_n^+(y) \gamma_5 (\not{D}^2 + m^2)^{-s-1} f_n(x)] = \\
&= \lim_{x \rightarrow y} s \sum_n \left\{ [\gamma_5 (\not{D}^2 + m^2)^{-s}]_{nn} \delta(x-y) + m^2 [\gamma_5 (\not{D}^2 + m^2)^{-s-1}]_{nn} \delta(x-y) \right\} = \\
&= \lim_{x \rightarrow y} s \sum_n \left\{ \text{Tr} [\gamma_5 (\not{D}^2 + m^2)^{-s}] \delta(x-y) + m^2 \text{Tr} [\gamma_5 (\not{D}^2 + m^2)^{-s-1}] \delta(x-y) \right\}.
\end{aligned}$$

Utilizzando ora la rappresentazione integrale per l' operatore $(\not{D}^2 + m^2)^{-\alpha}$ e per la $\delta(x-y)$ ossia la

$$(\not{D}^2 + m^2)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty d\tau \tau^{\alpha-1} e^{-(\not{D}^2 + m^2)\tau} \quad (\text{I.37})$$

$$\delta(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik(x-y)} \quad (\text{I.38})$$

otteniamo

$$C(s) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{1}{\Gamma(s)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \left\{ s \text{Tr} [\gamma_5 e^{(\not{D}^2 + m^2)\tau}] + s \frac{m^2 \tau}{s} \text{Tr} [\gamma_5 e^{-(\not{D}^2 + m^2)\tau}] \right\} e^{i(x-y)}$$

essendo $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

L' utilità di tutto questo costruito sta nel fatto che ora l' operatore $\not{D}$ diventa più maneggiabile visto che ora, agendo sull' esponenziale, il ∂_μ tira fuori un ik_μ . Scriviamo ora

$$\begin{aligned}
\not{D} \not{D} &= \gamma_\mu \gamma_\nu D_\mu D_\nu = \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu D_\mu D_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu D_\nu D_\mu) + \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu D_\mu D_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu D_\nu D_\mu) = \\
&= \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu D_\mu D_\nu - \gamma_\mu \gamma_\nu D_\nu D_\mu - 2D^2) + \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu D_\mu D_\nu + \gamma_\mu \gamma_\nu D_\nu D_\mu - 2D^2) = \\
&= \frac{1}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] D_\mu D_\nu + \frac{1}{2} \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} D_\mu D_\nu = -D^2 + \frac{1}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] (\partial_\mu + iA_\mu) (\partial_\nu + iA_\nu) = \\
&= -D^2 + \frac{1}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] (\partial_\mu \partial_\nu + iA_\mu \partial_\nu + \partial_\mu A_\nu - A_\mu A_\nu)
\end{aligned}$$

d' altra parte il commutatore è antisimmetrico mentre $\partial_\mu \partial_\nu$ e $A_\mu A_\nu$ sono termini simmetrici e dunque non danno contributi e se anche $A_\mu \partial_\nu$ si annulla³ si ha che

$$\not{D}^2 = -D^2 + \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] (\partial_\mu, \partial_\nu) = -D^2 + \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

e detto con

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (\text{I.39})$$

ed essendo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{I.40})$$

si ha che

$$\not{D}^2 = -D^2 + \sigma F_{\mu\nu} \quad (\text{I.41})$$

³Ma non ho la più pallida idea del perchè???

per cui

$$\text{Tr} [\gamma_5 e^{-(\not{D}^2 + m^2)\tau}] = \text{Tr} [\gamma_5 e^{(D^2 - m^2)\tau} e^{\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tau}] = e^{(D^2 - m^2)\tau} \text{Tr} [\gamma_5 e^{-\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tau}]$$

e, sviluppando l'esponenziale dentro alla traccia in serie di Taylor

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma_5 e^{-\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tau}] &= \text{Tr} \left[\gamma_5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tau)^n \right] = \\ &= \text{Tr} [\gamma_5] - \tau \text{Tr} [\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}] + \frac{\tau^2}{2} \text{Tr} [\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \sigma_{\rho\eta} F_{\rho\eta}] + o(\tau^2) \end{aligned}$$

ma $\text{Tr} [\gamma_5] = 0$, $\text{Tr} [\gamma_5 \sigma_{\mu\nu}] \propto \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu] = 0$ e se anche gli $o(\tau^2)$ sono nulli⁴ si ha che

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma_5 e^{-\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tau}] &= \frac{\tau^2}{2} \text{Tr} [\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\rho\eta}] F_{\mu\nu} F_{\rho\eta} = \\ &= -\frac{\tau^2}{32} \{ \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\eta] - \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\eta] - \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\eta \gamma_\rho] + \\ &\quad + \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\eta \gamma_\rho] \} F_{\mu\nu} F_{\rho\eta} \end{aligned}$$

ed essendo

$$\text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\eta] = 4\epsilon_{\mu\nu\rho\eta} \quad (\text{I.42})$$

allora

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma_5 e^{-\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tau}] &= -\frac{\tau^2}{32} (4\epsilon_{\mu\nu\rho\eta} - 4\epsilon_{\nu\mu\rho\eta} - 4\epsilon_{\mu\nu\eta\rho} + 4\epsilon_{\nu\mu\eta\rho}) F_{\mu\nu} F_{\rho\eta} = \\ &= -\frac{\tau^2}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\eta} F_{\mu\nu} F_{\rho\eta} \end{aligned}$$

e definito il tensore duale di $F_{\mu\nu}$ come

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\eta} F_{\rho\eta} \quad (\text{I.43})$$

si ha che

$$\text{Tr} [\gamma_5 e^{-\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tau}] = -\tau^2 F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \quad (\text{I.44})$$

e sostituito nella $C(s)$ tale risultato si ha che

$$\begin{aligned} C(s) &= \lim_{x \rightarrow y} \frac{1}{\Gamma(s)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \left\{ -s\tau^2 e^{(D^2 - m^2)\tau} - m^2 \tau^3 e^{(D^2 - m^2)\tau} \right\} e^{ik(x-y)} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow y} \frac{1}{\Gamma(s)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\tau \tau^{s+1} \left\{ s e^{(D^2 - m^2)\tau} + m^2 \tau e^{(D^2 - m^2)\tau} \right\} e^{ik(x-y)} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow y} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s+1} (s + m^2 \tau) e^{-m^2 \tau} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{D^2 \tau} e^{ik(x-y)} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

d'altra parte

⁴Anche se non ho la più pallida idea se è vero o no????

$$e^{D^2\tau} e^{ik(x-y)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(\partial_\mu + iA_\mu)^2 \tau]^n e^{ik(x-y)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(ik_\mu + iA_\mu)^2 \tau]^n e^{ik(x-y)} =$$

$$= e^{-(k^2 + 2k_\mu A_\mu \tau + A^2 \tau)} e^{ik(x-y)}$$

e d'altra parte è ora possibile eseguire il limite in quanto con la derivazione si è persa la presenza della $\delta(0)$ ⁵ e, posto $k'_\mu = k_\mu + A_\mu$ allora

$$e^{D^2\tau} e^{ik(x-y)} = e^{-(k'^2 - 2k'_\mu A_\mu + A^2 + 2k'_\mu A_\mu + A^2 - 2A^2)\tau} = e^{-k'^2\tau}$$

e posto $k'^2\tau = \bar{k}^2 \implies dk'_\mu = \frac{d\bar{k}_\mu}{\sqrt{\tau}} \implies d^4k' = \frac{d^4\bar{k}}{\tau^2}$ si ha che

$$C(s) = -\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} (s + m^2\tau) e^{-m^2\tau} \int \frac{d^4\bar{k}}{(2\pi)^4} e^{-\bar{k}^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \quad \text{e d'altra parte}$$

$$\int d^4k e^{-k^2} = (\sqrt{\pi})^4 = \pi^2 \quad (\text{I.45})$$

per cui

$$C(s) = -\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} (s + m^2\tau) e^{-m^2\tau} \frac{1}{16\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \quad \text{ma}$$

$$\int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} e^{-m^2\tau} = \int_0^\infty d\theta m^{-2} \theta^{s-1} m^{-2s+2} e^{-\theta} = \frac{1}{m^{2s}} \Gamma(s)$$

$$\int_0^\infty d\tau \tau^s e^{-m^2\tau} = \int_0^\infty d\theta m^{-2} \theta^s m^{-2s} e^{-\theta} = \frac{1}{m^{2s+2}} \Gamma(s+1) = \frac{s\Gamma(s)}{m^{2s+2}}$$

per cui $C(s) = -sm^{-2s} \frac{1}{(16\pi)^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} - m^2 sm^{-2s-s} \frac{1}{16\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$ e quindi in definitiva

$$C(s) = -sm^{-2s} \frac{1}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \quad (\text{I.46})$$

e sostituendo nella I.35

$$\ln J[\beta] = -i \int d^4x \beta(x) \left\{ \frac{d}{ds} \left(-s(m^2)^s \frac{1}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right) \right\} \Big|_{s=0} = i \int d^4x \beta(x) \left\{ \frac{1}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right\}$$

e quindi si è trovato che

$$\ln J[\beta] = \frac{i}{8\pi^2} \int d^4x \beta(x) F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \quad (\text{I.47})$$

e ricordando la I.13 si ha che

$$-S = -S' + \ln[\beta] = -S - \int d^4x \beta(x) [-i\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) - 2m \bar{\psi} \gamma_5 \psi] + \ln[\beta] \quad \text{da cui}$$

$$\int \beta(X) \left[i\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) + 2m \bar{\psi} \gamma_5 \psi + \frac{i}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right] d^4x = 0$$

e quindi si ottiene la legge di conservazione anomala per la corrente chirale

$$\partial(i\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) = -\frac{i}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} - 2m \bar{\psi} \gamma_5 \psi \quad (\text{I.48})$$

⁵Mah ... sarà poi vero???

e dunque

$$\partial j_\mu^5 = -\frac{i}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} - 2mj^5 \quad (\text{I.49})$$

per cui si vede come anche nel limite di massa nulla la corrente che nell' azione veniva conservata acquista nell' integrazione funzionale un termine anomalo detto di Adler-Bell-Jackwin della forma

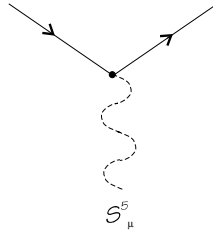
$$\partial_\mu j_\mu^5 = -\frac{i}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}. \quad (\text{I.50})$$

I.1.4 L' anomalia ABJ con il metodo perturbativo

Vediamo ora di attaccare lo stesso problema utilizzando il metodo perturbativo dei diagrammi di Feynman alla maniera di Adler [1]. Riscriviamo la I.15 nella forma

$$e^{-S} = J[\beta] e^{-S - \int d^4x \beta(x) (-i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi - 2m \bar{\psi} \gamma_5 \psi)} \quad (\text{I.51})$$

dove l' e^{-S} da graficamente le usuali regole di Feynman per la QED mentre il termine aggiuntivo nella sua parte indipendente da m ⁶ da, se accoppiato a una sorgente esterna S_μ^5 una nuova regola di vertice della forma



$$\equiv \mu^{2-\omega} \gamma_\mu \gamma_5 \quad (\text{I.52})$$

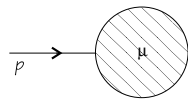
per cui, nel limite $m = 0$ la I.51 può essere graficamente scritta come

$$\exp \left\{ \sum \text{diagrammi} \right\} = J[\beta] \exp \left\{ \sum \text{diagrammi} + \sum \text{diagrammi} \right\} \quad (\text{I.53})$$

per cui

$$J[\beta] \simeq \exp \left\{ - \sum \text{diagrammi} \right\}. \quad (\text{I.54})$$

Chiamiamo nello spazio degli impulsi con $\Gamma_\mu^5(p, q)$ i grafici a due linee fermioniche contenenti un vertice $\gamma_\mu \gamma_5$



$$= S_F(p) \Gamma_\mu^5(p, q) S_F(q) = \int d^4x d^4y e^{-ipx - iqy} \langle 0 | \bar{\psi}(x) j_\mu^5(0) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \quad (\text{I.55})$$

⁶Tanto a noi poi interessa il limite di massa nulla

e con $\Gamma^5(p, q)$ i grafi a due linee fermioniche esterne contengono un vertice γ_5 tale che

$$\begin{aligned} \text{Diagram: } \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \bigcirc \text{---} \xleftarrow{q} \text{---} &= S_F(p) \Gamma^5(p, q) S_F(q) = \\ &= \int d^4x d^4y e^{-ipx - iquy} \langle 0 | \bar{\psi}(x) j^5(0) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.56})$$

Allora se si considera l'usuale equazione del moto si ottiene, come visto sopra per la divergenza il valore errato I.8. Da questa espressione si possono ricavare le così dette Ward identities utilizzando la [5]

$$\begin{aligned} \partial_\mu \langle 0 | j_\mu^5(x) \prod_i \Phi_i(x_i) | 0 \rangle &= \langle 0 | \partial_\mu j_\mu^5(x) \prod_i \Phi_i(x_i) | 0 \rangle - \\ &- i \sum_i \delta(x - x_i) \langle 0 | \delta \Phi_i(x_i) \prod_{j \neq i} \Phi_j(x_j) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{I.57})$$

Esplicitando tale formula in questo caso e ricordando la I.8 si ha che

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \partial_\mu^z \langle 0 | \bar{\psi}(x) j_\mu^5(z) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= \lim_{z \rightarrow 0} \langle 0 | \bar{\psi}(x) \partial_\mu j_\mu^5(z) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle - \lim_{z \rightarrow 0} i(\delta(z - x) \langle 0 | \delta \bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle + \\ &+ \delta(z - y) \langle 0 | \delta \bar{\psi}(y) \bar{\psi}(x) | 0 \rangle) = \\ &= -2m \lim_{z \rightarrow 0} [\langle 0 | \bar{\psi}(x) j^5(z) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle - \\ &- i(\delta(z - x) \langle 0 | (-i\gamma_5 \bar{\psi}(x)) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \delta(z - y) \langle 0 | (-i\gamma_5 \bar{\psi}(y)) \bar{\psi}(x) | 0 \rangle)] \end{aligned}$$

dove l'ultima si ha ricordando la I.5. Passando ora allo spazio di Fourier e dimenticando le costanti di normalizzazione che si semplificano ad ambo i termini si ha che

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \partial_\mu^z \int d^4p d^4q e^{ipx + iquy - i(p+q)z} S_F(p) \Gamma_\mu^5(p, q) S_F(q) &= \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left[-2m \int d^4p d^4q e^{ipx + iquy - i(p+q)z} S_F(p) \Gamma_\mu(p, q) S_F(q) - \right. \\ &- \gamma_5 \int d^4p d^4q e^{ipz + iquy} S_F(p+q) - \int d^4p d^4q e^{ipx + iquz} S_F(q+p) \gamma_5 \left. \right] \\ &- \lim_{z \rightarrow 0} i(p+q) \int d^4p d^4q e^{ipx + iquy - i(p+q)z} S_F(p) \Gamma_\mu^5(p, q) S_F(q) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left[-2m \int d^4p d^4q e^{ipx + iquy - i(p+q)z} S_F(p) \Gamma_\mu(p, q) S_F(q) - \right. \\ &- \gamma_5 \int d^4p d^4q e^{ipz + iquy} S_F(p+q) - \int d^4p d^4q e^{ipx + iquz} S_F(q+p) \gamma_5 \left. \right] \end{aligned}$$

Ora, nel membro a sinistra e nel primo membro a destra si può eseguire tranquillamente il limite senza problemi, negli ultimi due membri di sinistra si può formalmente sostituire al limite per $z \rightarrow 0$ rispettivamente un limite per $p \rightarrow 0$ e uno per $q \rightarrow 0$ senza che nulla cambi per cui si ha che

$$\begin{aligned}
& -i(p+q) \int d^4p d^4q e^{ipx+iqy} S_F(p) \Gamma_\mu^5(p, q) S_F(q) = \\
& = -2m \int d^4p d^4q e^{ipx+iqy} S_F(p) \Gamma_\mu(p, q) S_F(q) - \\
& \quad - \lim_{p \rightarrow 0} \gamma_5 \int d^4p d^4q e^{ipx+iqy} S_F(p+q) - \lim_{q \rightarrow 0} \int d^4p d^4q e^{ipx+iqy} S_F(q+p) \gamma_5
\end{aligned}$$

per cui le ward identities nello spazio di Fourier possono essere scritte come

$$\begin{aligned}
& -i(p+q) S_F(p) \Gamma_\mu^5(p, q) S_F(q) = -2m S_F(p) \Gamma_\mu(p, q) S_F(q) - \lim_{p \rightarrow 0} \gamma_5 S_F(p+q) \\
& \quad - \lim_{q \rightarrow 0} S_F(q+p) \gamma_5
\end{aligned}$$

$$(p+q) S_F(p) \Gamma_\mu^5(p, q) S_F(q) = 2mi S_F(p) \Gamma_\mu(p, q) S_F(q) + i\gamma_5 S_F(q) + iS_F(p) \gamma_5$$

e quindi

$$(p+q) \Gamma_\mu^5(p, q) = 2mi \Gamma_\mu(p, q) + iS_F^{-1}(p) \gamma_5 + i\gamma_5 S_F^{-1}(q). \quad (\text{I.58})$$

Ciò che intendiamo mostrare ora è che queste non valgono in un calcolo perturbativo e che il termine aggiuntivo è proprio il termine anomalo della I.49. Nell'idea di sviluppare le Ward identities in un ambito perturbativo scriviamo

$$\Gamma_\mu^5(p, q) = \gamma_\mu \gamma_5 + \Lambda_\mu^5(p, q), \quad \Gamma_5(p, q) = \gamma_5 + \Lambda_5(p, q), \quad S_F(p)^{-1} = i(\not{p} - m) - \Sigma(p) \quad (\text{I.59})$$

dove

$$[i(\not{p} - m)]^{-1} = \frac{-i}{(\not{p} - m)} = \text{---}\overrightarrow{\text{---}}\text{---} \text{ linea fermionica libera.} \quad (\text{I.60})$$

Allora, in termini delle correzioni non banali le Ward identities possono essere scritte come

$$(p+q) \Lambda_\mu^5(p, q) = 2mi \Lambda_\mu(p, q) - i\Sigma(p) \gamma_5 - i\gamma_5 \Sigma(q). \quad (\text{I.61})$$

Ora, allo scopo di derivare le I.61 in modo diagrammatico si può operare una classificazione dei diagrammi che contribuiscono a formare $\Lambda_\mu^5(p, q)$ in due classi:

- 1 diagrammi in cui il vertice $\gamma_m u \gamma_\nu$ è attaccato direttamente alla linea fermionica

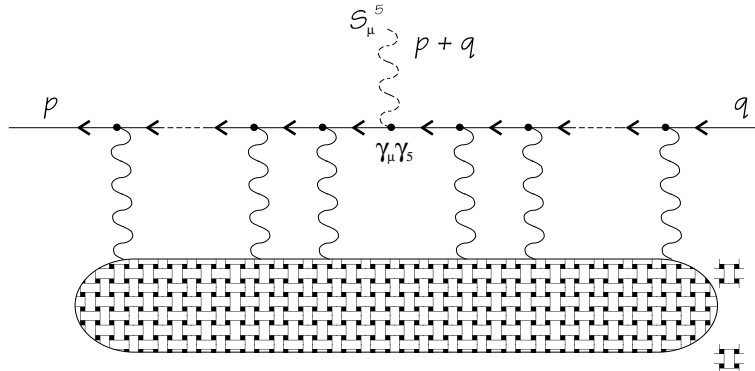


Fig 1 Diagramma con vertice chirale sulla linea fermionica

2 diagrammi in cui il vertice $\gamma_\mu\gamma_5$ è attaccato ad un loop interno

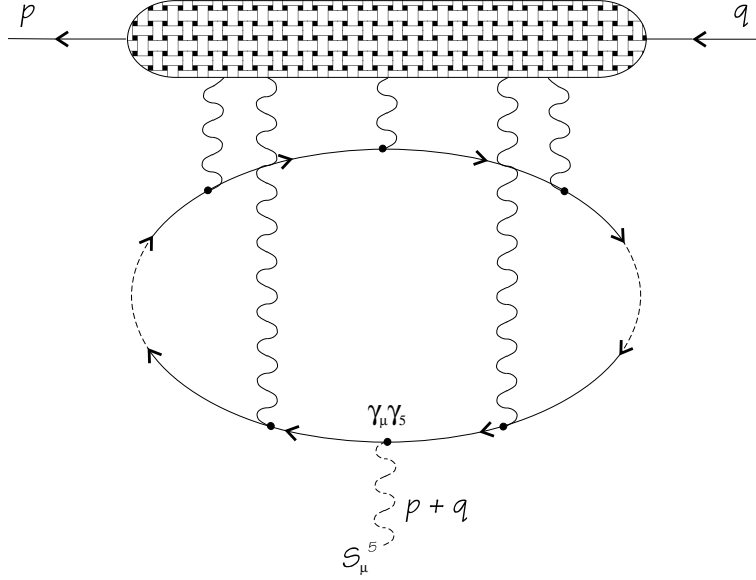


Diagramma con vertice chirale su un loop interno

Ora si può calcolare [1] esplicitamente il generico termine di ambedue le classi di diagrammi e sommando tali contributi si ottiene a prima vista la usuale Ward identities I.61. Senonchè nel calcolo della seconda classe di diagrammi si deve effettuare necessariamente una traslazione dell' elemento di integrazione di loop $\ell \rightarrow \ell + p + q$ in modo da semplificare alcuni termini e ottenere gli opportuni contributi alle I.61.

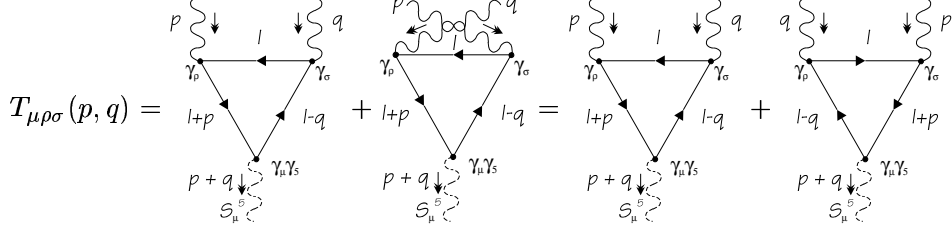
Ma l' operazione di cambiamento della variabile di integrazione è lecita a patto che l' integrale sia al massimo superficialmente con divergenza logaritmica ⁵. Ora il generico dermine dei diagrammi del secondo tipo con $2n$ fotoni uscenti dal loop sarà formato dall' integrale in d^4r e tanti fattori $\frac{1}{r^{-\alpha}}$ per quante linee fotoniche ci sono più una che le connette con il vertice $\gamma_\mu\gamma_5$. Allora, per $2n$ linee fotoniche fi avrà che

$$\int d^4\ell \left(\frac{1}{\ell}\right)^{2n+1} \propto \int d\ell |\ell|^3 \left(\frac{1}{\ell}\right)^{2n+1} \propto \int_0^\Lambda d\ell \ell^{2-2n} \approx \Lambda^{3-2n}$$

per cui il cambiamento di variabile è lecito per tutti quei grafici con loop con almeno quattro

⁵E questo dove stà????

fotoni uscenti. Tali grafici generano dunque le I.61. Ma il loop a triangolo



$$T_{\mu\rho\sigma}(p, q) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} = \text{diagram 3} + \text{diagram 4} \quad (\text{I.62})$$

ha solo due fotoni uscenti e dunque esso risulta linearmente divergente e quindi l'operazione di ridefinizione dell'integrale sul loop non è più lecita.

Ciò che accade dunque, per questo diagramma, è che detto con $f_{\mu\rho\sigma}(\ell, p, q)$ il grafo a triangolo con le linee esterne segate ossia tale che

$$\int d^4\ell f_{\mu\rho\sigma}(\ell, p, q) = T_{\mu\rho\sigma}(p, q) \quad (\text{I.63})$$

esso va come ℓ^{-3} e quando si applica una traslazione nella misura d'integrazione si ha che

$$\int d^4\ell f_{\mu\rho\sigma}(\ell, p, q) = \int d^4\ell f_{\mu\rho\sigma}(\ell' - a, p, q) = \int d^4\ell f_{\mu\rho\sigma}(\ell', p, q) - a_\alpha \int d^4\ell' \frac{\partial}{\partial a_\alpha} f_{\mu\rho\sigma}(\ell', p, q)$$

e mentre il primo termine va a completare le ward identities non anomale il secondo termine non nullo genera un termine anomalo che corrisponde proprio alla I.49.

Vediamolo esplicitamente utilizzando le regole di Feynman per la QED sul grafo a triangolo

$$\begin{aligned} T_{\mu\rho\sigma}(p, q) &= (-1) \text{Tr} \int \frac{d^{2\omega}\ell}{(2\pi)^{2-\omega}} (-i\mu^{2-\omega}) \gamma_\mu \gamma_5 \frac{-i}{\ell + \not{p}} (-ie\mu^{2-\omega}) \gamma_\rho \frac{-i}{\ell} (-ie\mu^{2-\omega}) \gamma_\sigma \frac{-i}{\ell - \not{q}} + \\ &\quad + p \leftrightarrow q = \\ &= e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int \frac{d^{2\omega}\ell}{(2\pi)^{2-\omega}} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{\ell + \not{p}} \gamma_\rho \frac{1}{\ell} \gamma_\sigma \frac{1}{\ell - \not{q}} \right] + p \leftrightarrow q = \\ &= -e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int \frac{d^{2\omega}\ell}{(2\pi)^{2-\omega}} \text{Tr} \left[\gamma_5 \gamma_\mu \frac{1}{\ell + \not{p}} \gamma_\rho \frac{1}{\ell} \gamma_\sigma \frac{1}{\ell - \not{q}} + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_5 \gamma_\mu \frac{1}{\ell - \not{q}} \gamma_\rho \frac{1}{\ell} \gamma_\sigma \frac{1}{\ell + \not{p}} \right] \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} T_{\mu\rho\sigma} &= e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int \frac{d^{2\omega}\ell}{(2\pi)^{2-\omega}} \frac{1}{(\ell + p)^2 \ell^2 (\ell - q)^2} \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu (\ell + \not{p}) \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma (\ell - \not{q}) + \\ &\quad + \gamma_5 \gamma_\mu (\ell - \not{q}) \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma (\ell + \not{p})]. \end{aligned} \quad (\text{I.64})$$

Come già detto questi integrali risultano linearmente divergenti in quattro dimensioni. L'idea immediata sarebbe di valutare la traccia e poi l'integrale ma dato che si lavora nell'ambito della regolarizzazione dimensionale ciò non funziona perchè la γ_5 risulta definita

solo in quattro dimensioni e non in un numero arbitrario. Certo esiste un modo di generalizzare [6] la definizione di γ_5 che porta al risultato voluto ma noi, per i nostri scopi, sceglieremo un'altra strada.

Valuteremo prima l'integrale, lo moltiplicheremo per i momenti esterni ossia estrarremo la divergenza di $T_{\mu\rho\sigma}(p, q)$ e ciò che rimarrà sarà la traccia di γ_μ con indici sommati sui momenti esterni ossia somme su indici quadridimensionali. A quel punto potremo valutare la traccia in quattro dimensioni. Iniziamo dunque valutando l'integrale I.64 in 2ω dimensioni. Ricordando che [7]

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[ay + b(1-x-y) + cx]^3} \quad (\text{I.65})$$

si ha che

$$\begin{aligned} T_{\mu\rho\sigma}(p, q) &= 2e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int \frac{d^{2\omega}\ell}{(2\pi)^{2-\omega}} 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[(\ell+p)^2 y + \ell^2(1-x-y) + \\ &\quad + (\ell-q)^2 x]^3} \text{Tr}[\dots] = \\ &= 2e^2 \mu^{3(2-\omega)} 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^{2\omega}\ell}{(2\pi)^{2-\omega}} \frac{1}{[\ell^2 y + p^2 y + 2\ell p y + \ell^2 - \ell^2 x - \ell^2 y + \\ &\quad + \ell^2 x + q^2 x - 2\ell q x]^3} \text{Tr}[\dots] = \\ &= 2e^2 \mu^{3(2-\omega)} 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^{2\omega}\ell}{(2\pi)^{2-\omega}} \frac{1}{[\ell^2 + 2\ell(py - qx) + p^2 y + q^2 x]^3} \text{Tr}[\dots] \end{aligned}$$

e detto con

$$s_\mu = p_\mu y - q_\mu x, \quad b^2 = p^2 y + q^2 x \quad (\text{I.66})$$

si ha che

$$\begin{aligned} T_{\mu\rho\sigma} &= 2e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^{2\omega}\ell}{(2\pi)^{2-\omega}} \frac{1}{[\ell^2 + 2\ell s + b^2]^3} \text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu (\ell + \not{p}) \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma (\ell - \not{q}) + \\ &\quad + \gamma_5 \gamma_\mu (\ell - \not{q}) \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma (\ell + \not{p})] \\ &= \dots \text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu (\ell \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \ell + \not{p} \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \ell - \not{p} \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \not{q} - \ell \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \not{q} + \ell \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \ell + \\ &\quad + \ell \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \not{p} - \not{q} \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \ell - \not{q} \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \not{p})] = \\ &= \dots \text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu (2\ell \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \ell + \not{p} \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \ell - \not{p} \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \not{q} - \ell \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \not{q} + \ell \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \not{p} - \\ &\quad - \not{q} \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \ell - \not{q} \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \not{p})]. \end{aligned}$$

Come si vede $T_{\mu\rho\sigma}(p, q)$ possiede termini lineari quadratici e cubici in ℓ . Al fine di semplificare le cose eliminando il termine cubico ricordando che

$$\not{\ell} \gamma_\mu \not{\ell} = 2\ell \ell_\mu \not{\ell} + \ell^2 \gamma_\mu \quad (\text{I.67})$$

si ha che

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}(p, q) &= \cdots \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu (-4\ell_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \not{\ell} + 2\ell^2 \gamma_\rho \gamma_\sigma \not{\ell} + \text{termini lineari e quadr. in } \ell)] = \\
&= \cdots \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu (8\ell_\rho \ell_\sigma \not{\ell} - 4\ell_\rho \ell^2 \gamma_\sigma + 2\ell^2 \gamma_\rho \gamma_\sigma \not{\ell} + \text{termini lineari e quadr. in } \ell)]
\end{aligned}$$

d' altra parte

$$\text{Tr} (\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha) = 0 \quad (\text{I.68})$$

per cui i primi due termini sono nulli e ciò che rimane è

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}(p, q) &= \cdots \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu (2\ell^2 \gamma_\rho \gamma_\sigma \not{\ell} + \not{p} \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \not{\ell} - \not{p} \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \not{q} - \not{\ell} \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \not{q} + \not{\ell} \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \not{p} - \\
&\quad - \not{q} \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \not{\ell} - \not{q} \gamma_\rho \not{\ell} \gamma_\sigma \not{p})] = \\
&= \cdots \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha] 2\ell^2 \ell_\alpha + \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\sigma \gamma_\delta] (p_\alpha \ell_\beta \ell_\delta - p_\alpha \ell_\beta q_\delta - \ell_\alpha \ell_\beta q_\delta + \\
&\quad + \ell_\alpha \ell_\beta p_\delta - q_\alpha \ell_\beta \ell_\delta - q_\alpha \ell_\beta p_\delta) = \\
&= \cdots \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha] 2\ell^2 \ell_\alpha + \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\sigma \gamma_\delta] [\ell_\beta \ell_\delta (p_\alpha - q_\alpha) + \ell_\alpha \ell_\beta (p_\delta - q_\delta) - \\
&\quad - \ell_\beta (p_\alpha q_\delta - q_\alpha p_\delta)]
\end{aligned}$$

per cui i termini da valutare sono

$$T_{\mu\rho\sigma} = T_{\mu\rho\sigma}^{(1)} + T_{\mu\rho\sigma}^{(2)} + T_{\mu\rho\sigma}^{(3)} \quad (\text{I.69})$$

dove

$$T_{\mu\rho\sigma}^{(1)} = 2e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^{2\omega} \ell}{(2\pi)^{2-\omega}} \frac{2\ell^2 \ell_\alpha}{[\ell^2 + 2\ell s + b^2]^3} \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha] \quad (\text{I.70})$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}^{(2)} &= 2e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^{2\omega} \ell}{(2\pi)^{2-\omega}} \frac{\ell_\beta \ell_\delta (p_\alpha - q_\alpha) + \ell_\alpha \ell_\beta (p_\delta - q_\delta)}{[\ell^2 + 2\ell s + b^2]^3} \cdot \\
&\quad \cdot \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\sigma \gamma_\delta]
\end{aligned} \quad (\text{I.71})$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}^{(3)} &= 2e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^{2\omega} \ell}{(2\pi)^{2-\omega}} \frac{-\ell_\beta (p_\alpha q_\delta - q_\alpha p_\delta)}{[\ell^2 + 2\ell s + b^2]^3} \cdot \\
&\quad \cdot \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\sigma \gamma_\delta]
\end{aligned} \quad (\text{I.72})$$

e d' altra parte, ricordando che ⁸

$$\int \frac{d^{2\omega} \ell}{(2\pi)^{2-\omega}} \frac{\ell_\mu}{[\ell^2 + 2\ell s + b^2]^3} = -\frac{\Gamma(3-\omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(3)} \frac{s_\mu}{(b^2 - s^2)^{3-\omega}} \quad (\text{I.73})$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^{2\omega} \ell}{(2\pi)^{2-\omega}} \frac{\ell_\mu \ell_\nu}{[\ell^2 + 2\ell s + b^2]^3} &= \frac{1}{(4\pi)^\omega \Gamma(3)} \left\{ \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{\Gamma(2-\omega)}{(b^2 - s^2)^{2-\omega}} + \right. \\
&\quad \left. + \Gamma(3-\omega) \frac{s_\mu s_\nu}{(b^2 - s^2)^{3-\omega}} \right\}
\end{aligned} \quad (\text{I.74})$$

mentre, derivando ulteriormente rispetto a s_μ la

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^{2\omega} \ell}{(2\pi)^{2-\omega}} \frac{\ell_\mu \ell_\nu}{[\ell^2 + 2\ell s + b^2]^A} &= \frac{1}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \left\{ \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{\Gamma(A-1-\omega)}{(b^2 - s^2)^{A-1-\omega}} + \right. \\
&\quad \left. + \Gamma(A-\omega) \frac{s_\mu s_\nu}{(b^2 - s^2)^{A-\omega}} \right\}
\end{aligned} \quad (\text{I.75})$$

⁸Vedi appendice

si ha che

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^{2\omega} \ell}{(2\pi)^{2-\omega}} \frac{\ell_\mu \ell_\nu (-A) 2\ell_\mu}{[\ell^2 + 2\ell s + b^2]^{A+1}} &= \frac{1}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \left\{ \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{\Gamma(A-1-\omega)(-2s_\mu)(-A+1+\omega)}{(b^2-s^2)^{A-\omega}} + \right. \\
&\quad + \Gamma(A-\omega) \delta_{\mu\mu} \frac{s_\nu}{(b^2-s^2)^{A-\omega}} + \Gamma(A-\omega) \delta_{\mu\nu} \frac{s_\mu}{(b^2-s^2)^{A-\omega}} + \\
&\quad \left. + \Gamma(A-\omega) \delta_{\mu\nu} \frac{s_\nu s_\mu (-2s_\mu)(A-\omega)}{(b^2-s^2)^{A+1-\omega}} \right\} = \\
&= \frac{1}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \left\{ \frac{s_\nu \Gamma(A-\omega)}{(b^2-s^2)^{A-\omega}} + \Gamma(A-\omega)(2\omega+1) \frac{s_\nu}{(b^2-s^2)^{A-\omega}} - \right. \\
&\quad \left. - 2\Gamma(A-\omega) \frac{s^2 s_\nu (-A+\omega)}{(b^2-s^2)^{A+1-\omega}} \right\} = \\
&= \frac{1}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \left\{ \Gamma(A-\omega)(2\omega+2) \frac{s_\nu}{(b^2-s^2)^{A-\omega}} + \right. \\
&\quad \left. + 2\Gamma(A+1-\omega) \frac{s^2 s_\nu}{(b^2-s^2)^{A+1-\omega}} \right\}
\end{aligned}$$

e dividendo tutto per $-2A$

$$\int \frac{d^{2\omega} \ell}{(2\pi)^{2-\omega}} \frac{\ell^2 \ell_\nu}{[\ell^2 + 2\ell s + b^2]^{A+1}} = \frac{1}{(4\pi)^\omega \Gamma(A+1)} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{s_\nu}{(b^2-s^2)^{A-\omega}} \Gamma(A-\omega)(2\omega+2) - \right. \\
\left. - \Gamma(A+1-\omega) \frac{s^2 s_\nu}{(b^2-s^2)^{A+1-\omega}} \right\}$$

e posto $A+1 \rightarrow A$ si ha che

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^{2\omega} \ell}{(2\pi)^{2-\omega}} \frac{\ell^2 \ell_\nu}{[\ell^2 + 2\ell s + b^2]^A} &= -\frac{1}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \left\{ \frac{s_\nu}{(b^2-s^2)^{A-1-\omega}} \Gamma(A-\omega)(\omega+1) + \right. \\
&\quad \left. + \Gamma(A-\omega) \frac{s^2 s_\nu}{(b^2-s^2)^{A-\omega}} \right\}. \tag{I.76}
\end{aligned}$$

Partiamo allora con il calcolare $T_{\mu\rho\sigma}^{(1)}(p, q)$; utilizzando proprio quest' ultima formula e chiamando con

$$D \equiv b^2 - s^2 = q^2 x(1-x) + p^2 y(1-y) + 2pqxy \tag{I.77}$$

si ha che

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}^{(1)}(p, q) &= 4e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ -\frac{1}{(4\pi)^\omega \Gamma(3)} \left[\frac{s_\alpha}{D^{2-\omega}} \Gamma(2-\omega)(\omega+1) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Gamma(3-\omega) \frac{s^2 s_\alpha}{D^{3-\omega}} \right] \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha] \right\} = \\
&= -\frac{2e^2 \mu^{3(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \Gamma(2-\omega)(\omega+1) \frac{s_\alpha}{D^{2-\omega}} + \Gamma(3-\omega) \frac{s^2 s_\alpha}{D^{3-\omega}} \right\} \cdot \\
&\quad \cdot \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha]
\end{aligned}$$

Si tratta ora di regolarizzare questo grafico usando l'approccio dimensionale $\varepsilon = 2 - \omega \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}^{(1)} &= -2e^2 \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (4\pi\mu^3)^\varepsilon \left\{ \Gamma(\varepsilon)(3 - (2 - \omega)) \frac{s_\alpha}{D^\varepsilon} + \Gamma(1 - \varepsilon) \frac{s_\alpha^2}{D^\varepsilon} \frac{1}{D} \right\} \text{Tr}[\dots] = \\
&= -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (4\pi\mu^3)^\varepsilon \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon) \right) (3 - \varepsilon) \frac{s_\alpha}{D^\varepsilon} + \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon) \right) \frac{s_\alpha^2}{D^\varepsilon} \frac{1}{D} \right\} \text{Tr}[\dots] = \\
&= -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon) \right) (3 - \varepsilon) s_\alpha \left(\frac{D}{4\pi\mu^3} \right)^{-\varepsilon} + \\
&\quad + \varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon) \right) s_\alpha^2 \frac{1}{D} \left(\frac{D}{4\pi\mu^3} \right)^{-\varepsilon} \text{Tr}[\dots] = \\
&= -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon) \right) (3 - \varepsilon) s_\alpha \left(1 - \varepsilon \ln \frac{D}{4\pi\mu^3} + o(\varepsilon^2) \right) + \\
&\quad + \varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon) \right) s_\alpha^2 \frac{1}{D} \left(1 - \varepsilon \ln \frac{D}{4\pi\mu^3} + o(\varepsilon^2) \right) \text{Tr}[\dots] = \\
&= -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(-s_\alpha - 3s_\alpha\gamma - 3s_\alpha \ln \frac{D}{4\pi\mu^3} + s_\alpha \frac{s^2}{D} + 3\frac{1}{\varepsilon}s_\alpha + o(\varepsilon) \right) \text{Tr}[\dots]
\end{aligned}$$

e dunque, a meno di ordini finiti si ha che

$$T_{\mu\rho\sigma}^{(1)}(p, q) = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(-3\frac{1}{\varepsilon} + 3\gamma + 3 \ln \frac{D}{4\pi\mu^3} - \frac{s^2}{D} \right) \text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \not{s}]. \quad (\text{I.78})$$

Passiamo ora a $T_{\mu\rho\sigma}^{(2)}(p, q)$ utilizzando la I.74

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}^{(2)} &= 2e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(4\pi)^\omega 2} \left\{ \left[\frac{1}{2} \delta_{\beta\delta} \frac{\Gamma(2-\omega)}{D^{2-\omega}} + \Gamma(3-\omega) \frac{s_\beta s_\delta}{D^{3-\omega}} \right] (p_\alpha - q_\alpha) + \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \frac{\Gamma(2-\omega)}{D^{2-\omega}} + \Gamma(3-\omega) \frac{s_\alpha s_\beta}{D^{3-\omega}} \right] (p_\delta - q_\delta) \text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\sigma \gamma_\delta] \right\} \\
T_{\mu\rho\sigma}^{(2)}(p, q) &= e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(4\pi)^\omega} \left\{ \left\{ \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2-\omega)}{D^{2-\omega}} \{ \text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\sigma \gamma_\delta] (p_\alpha - q_\alpha) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\sigma \gamma_\delta] (p_\delta - q_\delta) \} \right\} + \left[\Gamma(3-\omega) \frac{s_\beta s_\delta}{D^{3-\omega}} (p_\alpha - q_\alpha) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Gamma(3-\omega) \frac{s_\alpha s_\beta}{D^{3-\omega}} (p_\delta - q_\delta) \right] \text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\sigma \gamma_\delta] \right\}
\end{aligned}$$

ma

$$\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\mu = -\gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\mu - 2\delta_{\mu\rho} \gamma_\mu = (2\omega - 2)\gamma_\rho = -2(1 - \omega)\gamma_\rho$$

per cui

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}^{(2)} = e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(4\pi)^\omega} \left\{ \left\{ \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2-\omega)}{D^{2-\omega}} \{-2(1-\omega) \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\sigma] (p_\alpha - q_\alpha) - \right. \right. \\
-2(1-\omega) \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\delta] (p_\delta - q_\delta)\} \} + \left[\Gamma(3-\omega) \frac{s_\beta s_\delta}{D^{3-\omega}} (p_\alpha - q_\alpha) + \right. \\
\left. \left. + \Gamma(3-\omega) \frac{s_\alpha s_\beta}{D^{3-\omega}} (p_\delta - q_\delta) \right] \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\sigma \gamma_\delta] \right\}
\end{aligned}$$

e osserviamo come ora, nelle prime due tracce sia possibile anticommutare senza il termine con la δ perchè in tali termini ci sarebbe la traccia di una γ_5 con due γ_μ che è sempre nulla. Allora, anticommutando si ha che

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}^{(2)} = e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(4\pi)^\omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2-\omega)}{D^{2-\omega}} - 4(1-\omega) \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha] (p_\alpha - q_\alpha) + \right. \\
\left. + \left[\Gamma(3-\omega) \frac{s_\beta s_\delta}{D^{3-\omega}} (p_\alpha - q_\alpha) + \Gamma(3-\omega) \frac{s_\alpha s_\beta}{D^{3-\omega}} (p_\delta - q_\delta) \right] \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\sigma \gamma_\delta] \right\}
\end{aligned}$$

e d' altra parte non si fa fatica a dimostrare che

$$\begin{aligned}
\gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\sigma \gamma_\delta = -2\gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\beta \delta_{\sigma\delta} + 2\gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\sigma \delta_{\beta\delta} - 2\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\sigma \delta_{\rho\delta} + 2\gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\sigma \delta_{\delta\alpha} - \\
-2\gamma_\delta \gamma_\beta \gamma_\sigma \delta_{\alpha\rho} + 2\gamma_\delta \gamma_\rho \gamma_\sigma \delta_{\alpha\beta} - 2\gamma_\delta \gamma_\rho \gamma_\beta \delta_{\alpha\sigma} - \gamma_\delta \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\sigma \gamma_\alpha
\end{aligned} \tag{I.79}$$

e inserito questo risultato nel termine della seconda traccia proporzionale a $s_\alpha s_\beta$ produce, a parte il segno, come ultimo termine proprio quello proporzionale a $s_\beta s_\delta$ elidendolo. Si ha dunque che

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}^{(2)} = e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(4\pi)^\omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2-\omega)}{D^{2-\omega}} - 4(1-\omega) \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha] (p_\alpha - q_\alpha) - \right. \\
-2\Gamma(3-\omega) \frac{s_\beta s_\delta}{D^{3-\omega}} (p_\delta - q_\delta) \{ \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\beta] \delta_{\sigma\delta} - \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\sigma] \delta_{\beta\delta} + \\
+ \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\sigma] \delta_{\rho\delta} - \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\sigma] \delta_{\delta\alpha} + \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\delta \gamma_\beta \gamma_\sigma] \delta_{\alpha\rho} - \\
\left. - \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\delta \gamma_\rho \gamma_\sigma] \delta_{\alpha\beta} + \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\delta \gamma_\rho \gamma_\beta] \delta_{\alpha\sigma} \} \right\} \\
T_{\mu\rho\sigma}^{(2)} = e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(4\pi)^\omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2-\omega)}{D^{2-\omega}} - 4(1-\omega) \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha] (p_\alpha - q_\alpha) - \right. \\
-2\Gamma(3-\omega) \frac{1}{D^{3-\omega}} \{ \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{s} \gamma_\rho \not{s}] (p_\sigma - q_\sigma) - \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{s} \gamma_\rho \gamma_\sigma] s \cdot (p - q) + \\
+ \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{s} \not{s} \gamma_\sigma] (p_\rho - q_\rho) - \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \not{s} \gamma_\sigma] s \cdot (p - q) + \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu (\not{p} - \not{q}) \not{s} \gamma_\sigma] s_\rho - \\
\left. - \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu (\not{p} - \not{q}) \gamma_\rho \gamma_\sigma] s^2 + \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu (\not{p} - \not{q}) \gamma_\rho \not{s}] s_\sigma \} \right\}
\end{aligned}$$

d' altra parte anche per questi termini vale il fatto che si può anticommutare senza il termine con la delta per cui

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}^{(2)} = & e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(4\pi)^\omega} \left\{ -2 \frac{\Gamma(2-\omega)}{D^{2-\omega}} (1-\omega) \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha] (p_\alpha - q_\alpha) - \right. \\
& - 2\Gamma(3-\omega) \frac{1}{D^{3-\omega}} \{ -\text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{s} \not{\gamma}_\rho] (p_\sigma - q_\sigma) + \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \not{s} \gamma_\sigma] s \cdot (p - q) + \\
& + \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{s} \not{\gamma}_\sigma] (p_\rho - q_\rho) - \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \not{s} \gamma_\sigma] s \cdot (p - q) + \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu (\not{p} - \not{q}) \not{s} \gamma_\sigma] s_\rho - \\
& \left. - \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma (\not{p} - \not{q})] s^2 + \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu (\not{p} - \not{q}) \gamma_\rho \not{s}] s_\sigma \} \right\}
\end{aligned}$$

per cui il secondo e il quarto si elidono a vicenda. Passiamo a regolarizzare i termini rimasti

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}^{(2)} = & -2e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(4\pi)^\omega} \left\{ \frac{\Gamma(2-\omega)}{D^{2-\omega}} (2-\omega-1) \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma (\not{p} - \not{q})] + \right. \\
& + \Gamma(3-\omega) \frac{1}{D^{3-\omega}} \{ \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{s} \not{\gamma}_\sigma] (p_\rho - q_\rho) - \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{s} \not{\gamma}_\rho] (p_\sigma - q_\sigma) - \\
& - \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma (\not{p} - \not{q})] s^2 + \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu (\not{p} - \not{q}) \not{s} \gamma_\sigma] s_\rho - \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu (\not{p} - \not{q}) \not{s} \gamma_\rho] s_\sigma \} \Big\} = \\
= & -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(\frac{1}{4\pi\mu^3} \right)^{-\varepsilon} \{ \Gamma(\varepsilon) D^{-\varepsilon} (\varepsilon-1) \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma (\not{p} - \not{q})] + \\
& + \varepsilon \Gamma(\varepsilon) D^{-\varepsilon} D^{-1} \{ \dots \} \} = \\
= & -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon) \right) \left(1 - \varepsilon \ln \frac{D}{4\pi\mu^3} + o(\varepsilon^2) \right) \cdot \right. \\
& \cdot (\varepsilon-1) \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma (\not{p} - \not{q})] + \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon) \right) \left(1 - \varepsilon \ln \frac{D}{4\pi\mu^3} + o(\varepsilon^2) \right) D^{-1} \{ \dots \} \Big\} = \\
= & -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \left(-\frac{1}{\varepsilon} + 1 + \ln \frac{D}{4\pi\mu^3} + \gamma + o(\varepsilon) \right) \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma (\not{p} - \not{q})] + \right. \\
& \left. + (D^{-1} + o(\varepsilon)) \{ \dots \} \right\}
\end{aligned}$$

e dunque ordini finiti si ha che

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}^{(2)} = & -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \left(-\frac{1}{\varepsilon} + 1 + \ln \frac{D}{4\pi\mu^3} + \gamma \right) \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma (\not{p} - \not{q})] + \right. \\
& + D^{-1} \{ \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{s} \not{\gamma}_\sigma] (p_\rho - q_\rho) - \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{s} \not{\gamma}_\rho] (p_\sigma - q_\sigma) - \\
& - \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma (\not{p} - \not{q})] s^2 + \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu (\not{p} - \not{q}) \not{s} \gamma_\sigma] s_\rho - \\
& \left. - \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu (\not{p} - \not{q}) \not{s} \gamma_\rho] s_\sigma \} \right\} \tag{I.80}
\end{aligned}$$

Passiamo infine a calcolare $T_{\mu\rho\sigma}^{(3)}(p, q)$ utilizzando la I.73 e con lo stesso metodo utilizzato sopra si giunge a

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}^{(3)} &= e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{\Gamma(3-\omega)}{(4\pi)^\omega} \frac{s_\beta}{D^{3-\omega}} p_\alpha q_\delta \left\{ -2 \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\beta] \delta_{\sigma\delta} + \right. \\
&\quad + 2 \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\sigma] \delta_{\beta\delta} - 2 \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\sigma] \delta_{\rho\delta} + 2 \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\sigma] \delta_{\delta\alpha} - \\
&\quad - 2 \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\delta \gamma_\beta \gamma_\sigma] \delta_{\alpha\rho} + 2 \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\delta \gamma_\rho \gamma_\sigma] \delta_{\alpha\beta} - 2 \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\delta \gamma_\rho \gamma_\beta] \delta_{\alpha\sigma} \left. \right\} = \\
&= -2e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{\Gamma(3-\omega)}{(4\pi)^\omega} \frac{1}{D^{3-\omega}} \left\{ \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{p} \gamma_\rho \not{s}] q_\sigma - \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{p} \gamma_\rho \gamma_\sigma] s \cdot p + \right. \\
&\quad + \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{p} \not{s} \gamma_\sigma] q_\rho - \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \not{s} \gamma_\sigma] p \cdot q + \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{q} \not{s} \gamma_\sigma] p_\rho - \\
&\quad - \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{q} \gamma_\rho \gamma_\sigma] s \cdot p + \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{q} \gamma_\rho \not{s}] p_\sigma \left. \right\} = \\
&= -2e^2 \mu^{3(2-\omega)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{\Gamma(3-\omega)}{(4\pi)^\omega} \frac{1}{D^{3-\omega}} \{ \dots \}
\end{aligned}$$

e regolarizzando anche questo termine

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}^{(3)}(p, q) &= -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(\frac{1}{4\pi\mu^3} \right)^{-\varepsilon} \varepsilon \Gamma(\varepsilon) \frac{D^{-\varepsilon}}{D} \{ \dots \} = \\
&= -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon) \right) \left(1 - \varepsilon \ln \frac{D}{4\pi\mu^3} + o(\varepsilon^2) \right) D^{-1} \{ \dots \} = \\
&= -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (D^{-1} + o(\varepsilon)) \{ \dots \}
\end{aligned}$$

e quindi ordini finiti si ha che

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}^{(3)} &= -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (D^{-1} + o(\varepsilon)) \left\{ \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{p} \gamma_\rho \not{s}] q_\sigma - \right. \\
&\quad - \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{p} \gamma_\rho \gamma_\sigma] s \cdot p + \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{p} \not{s} \gamma_\sigma] q_\rho - \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \not{s} \gamma_\sigma] p \cdot q + \\
&\quad + \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{q} \not{s} \gamma_\sigma] p_\rho - \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{q} \gamma_\rho \gamma_\sigma] s \cdot p + \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \not{q} \gamma_\rho \not{s}] p_\sigma \left. \right\} \quad (\text{I.81})
\end{aligned}$$

Vediamo allora di risommare i vari termini ordine per ordine. Ordini $\frac{1}{\varepsilon}$ si ha che

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma} &= -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \frac{3}{\varepsilon} s_\alpha \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha] - \frac{1}{\varepsilon} \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha] (p_\alpha - q_\alpha) \right\} = \\
&= -\frac{e^2}{8\pi^2} \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha] \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \{ (q_\alpha - p_\alpha) + 3(p_\alpha y - q_\alpha x) \} = \\
&= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{e^2}{8\pi^2} \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha] \left\{ (q_\alpha - p_\alpha) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy - 3q_\alpha \int_0^1 dx x \int_0^{1-x} dy + \right. \\
&\quad \left. + 3p_\alpha \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy y \right\} = \\
&= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{e^2}{8\pi^2} \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha] \left\{ (q_\alpha - p_\alpha) \int_0^1 dx (1-x) - 3q_\alpha \int_0^1 dx x (1-x) + \right. \\
&\quad \left. + 3p_\alpha \int_0^1 dx \frac{(1-x)^2}{2} \right\} = \\
&= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{e^2}{8\pi^2} \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha] \left\{ (q_\alpha - p_\alpha) \frac{1}{2} - 3q_\alpha \frac{1}{6} + 3p_\alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right) \right\} = 0
\end{aligned}$$

Per cui nonostante $T_{\mu\rho\sigma}^{(1)}(p, q)$ e $T_{\mu\rho\sigma}^{(2)}$ siano singolarmente divergenti per $\omega \rightarrow 2$ la loro somma da contributi finiti nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$ per cui, in tale limite, il diagramma a triangolo risulta convergente. Allora in tale limite l'unico termine che risulta non nullo e che dunque contribuisce alla corrente assiale è il termine indipendente da ε che si deve ora sommare.

Osserviamo innanzitutto che esistono, in tale termine, contributi lineare in p_α , lineari in q_α e termini di grado maggiore. Ora, ciò che a noi interessa sarà la divergenza sugli impulsi esterni del grafico I.62 ossia il termine $(p+q)_\mu T_{\mu\rho\sigma}$ per cui i pezzi non lineari di $T_{\mu\rho\sigma}$ spariscono in quanto sommando su μ la traccia tira fuori delle $\epsilon_{\mu\rho\sigma\alpha}$ e dunque termini contenenti gli impulsi esterni in grado maggiore al primo si annullano. Ci si può allora dimenticare tranquillamente delle varie tracce contenenti i prodotti di p_α , q_α e s_α

Ciò che rimane al termine del calcolo sono allora i termini proporzionali a $\text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \not{s}]$ in $T_{\mu\rho\sigma}^{(1)}$ e i termini proporzionali a $\text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma (\not{p} - \not{q})]$ in $T_{\mu\rho\sigma}^{(2)}$

Possiamo a questo punto eliminare ulteriormente i termini contenenti il logaritmo con la seguente considerazione: tali diagrammi contengono, così come sono una divergenza infrarossa ma, come la I.62 non contiene divergenze ultraviolette si può anche dimostrare che esso non contiene divergenze infrarosse e dunque tali termini devono necessariamente annullarsi. Allora ciò che resta è il solo termine proporzionale a γ e quello costante. Sommando i termini proporzionali a γ si ha che

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}^{(\gamma)} &= -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \{ -3\gamma s_\alpha + \gamma(p_\alpha - q_\alpha) \} \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha] = \\
&= -\frac{e^2 \gamma}{8\pi^2} \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha] \left\{ -3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (p_\alpha y - q_\alpha x) + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (p_\alpha - q_\alpha) \right\} = \\
&= -\frac{e^2 \gamma}{8\pi^2} \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha] \left\{ -3 \left(\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy p_\alpha y - \int_0^1 dx x \int_0^{1-x} dy q_\alpha \right) + \frac{1}{2} (p_\alpha - q_\alpha) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}^{(\gamma)} &= -\frac{e^2\gamma}{8\pi^2} \text{Tr}[\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\alpha] \left\{ -3 \left(\int_0^1 dx \frac{(1-x)^2}{2} p_\alpha - \int_0^1 dx x(1-x) q_\alpha \right) + \frac{1}{2}(p_\alpha - q_\alpha) \right\} = \\
&= -\frac{e^2\gamma}{8\pi^2} \text{Tr}[\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\alpha] \left\{ -3 \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right) p_\alpha - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) q_\alpha \right] + \frac{1}{2}(p_\alpha - q_\alpha) \right\} = \\
&= -\frac{e^2\gamma}{8\pi^2} \text{Tr}[\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\alpha] \left\{ -3 \left(\frac{1}{6} p_\alpha - \frac{1}{6} q_\alpha \right) + \frac{1}{2}(p_\alpha - q_\alpha) \right\} = \\
&= -\frac{e^2\gamma}{8\pi^2} \text{Tr}[\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\alpha] \left\{ -\frac{1}{2}(p_\alpha - q_\alpha) + \frac{1}{2}(p_\alpha - q_\alpha) \right\} = 0
\end{aligned}$$

Allora anche il termine proporzionale a γ è nullo. Resta dunque il termine in $T_{\mu\rho\sigma}^{(1)}$ contenente il solo s_α e il termine in $T_{\mu\rho\sigma}^{(2)}$ contenente $p_\alpha - q_\alpha$. Per il calcolo di quest'ultimo termine ritorniamo a monte ⁹. Chiamiamo con $T_{\mu\rho\sigma}^{(1)'}$ e con $T_{\mu\rho\sigma}^{(2)'}$ i due termini indipendenti dagli impulsi esterni in $T_{\mu\rho\sigma}^{(1)}$ e in $T_{\mu\rho\sigma}^{(2)}$ proporzionali a $\text{Tr}[\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\alpha]$ ossia

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}' &= T_{\mu\rho\sigma}^{(1)'} + T_{\mu\rho\sigma}^{(2)'} = \left\{ -\frac{2e^2\mu^{3(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \Gamma(2-\omega)(\omega+1) \frac{s_\alpha}{D^{2-\omega}} - \right. \\
&\quad \left. -\frac{2e^2\mu^{3(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \Gamma(2-\omega)(1-\omega)(p_\alpha - q_\alpha) \right\} \text{Tr}[\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\alpha]
\end{aligned}$$

ora, si può vedere [7] ¹⁰ che il primo termine si può riscrivere di modo che

$$\begin{aligned}
T_{\mu\rho\sigma}' &= \left\{ -\frac{2e^2\mu^{3(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \Gamma(2-\omega)\omega \frac{(p_\alpha - q_\alpha)}{D^{2-\omega}} - \right. \\
&\quad \left. -\frac{2e^2\mu^{3(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \Gamma(2-\omega)(1-\omega)(p_\alpha - q_\alpha) \right\} \text{Tr}[\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\alpha] = \\
&= -\frac{2e^2\mu^{3(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \Gamma(2-\omega) \frac{(p_\alpha - q_\alpha)}{D^{2-\omega}} (2-2\omega+\omega) \text{Tr}[\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\alpha] = \\
&= -\frac{2e^2\mu^{3(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \Gamma(2-\omega) \frac{(p_\alpha - q_\alpha)}{D^{2-\omega}} (2-\omega) \text{Tr}[\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\alpha]
\end{aligned}$$

e regolarizzando dimenticando il termine in $\frac{1}{\varepsilon}$ e gli ordini superiori a ε^0 si ha che

$$T_{\mu\rho\sigma}' = -\frac{e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon) \right) \varepsilon \left(1 - \varepsilon \ln \frac{D}{4\pi\mu^3} + o(\varepsilon^2) \right) \text{Tr}[\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma(\not{p} - \not{q})]$$

e considerando il solo termine indipendente da ε

⁹Sono stato costretto a seguire questa via strana perchè con un calcolo diretto di somma dei termini già regolarizzati non mi tornava il risultato giusto, sono stato costretto allora a seguire il metodo che usa il Ramond [7] che somma i termini prima di regolarizzare utilizzando quell' integrazione per parti di cui sotto che per me è "magia"

¹⁰Io questo passaggio proprio non lo mando giù, per me hanno usato la bacchetta magica?????

$$\begin{aligned}
T'_{\mu\rho\sigma} &= -\frac{e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma (\not{p} - \not{q})] + \dots \\
&= -\frac{e^2}{2(16\pi^2)} \operatorname{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma (\not{p} - \not{q})] + \dots
\end{aligned}$$

e calcolando la divergenza della corrente assiale e ricordando la I.42 e visto che, come detto sopra, i termini tralasciati si annullano si ha che

$$\begin{aligned}
(p+q)_\mu T'_{\mu\rho\sigma} &= -\frac{e^2}{2(16\pi^2)} \operatorname{Tr} [\gamma_5 (\not{p} + \not{q}) \gamma_\rho \gamma_\sigma (\not{p} - \not{q})] = -\frac{e^2}{2(16\pi^2)} 4\epsilon_{\mu\rho\sigma\alpha} (p+q)_\mu (p-q)_\alpha = \\
&= -\frac{e^2}{8\pi^2} \epsilon_{\mu\rho\sigma\alpha} (p_\mu p_\alpha - p_\mu q_\alpha + q_\mu p_\alpha - q_\mu q_\alpha)
\end{aligned}$$

d' altra parte i termini simmetrici si annullano per cui

$$(p+q)_\mu T'_{\mu\rho\sigma} = -\frac{e^2}{8\pi^2} \epsilon_{\mu\rho\sigma\alpha} (q_\mu p_\alpha - p_\mu q_\alpha) = -\frac{e^2}{8\pi^2} (\epsilon_{\rho\sigma\alpha\mu} q_\mu p_\alpha - \epsilon_{\rho\sigma\mu\alpha} p_\mu q_\alpha)$$

e dunque finalmente

$$(p+q)_\mu T_{\mu\rho\sigma}(p, q) = \frac{e^2}{4\pi^2} \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} p_\mu q_\nu \quad (\text{I.82})$$

Allora si vede come calcolando con uno sviluppo perturbativo il termine $(p+q)_\mu \Lambda_\mu^5$ si ha che i diagrammi del primo tipo danno i termini $2mi\Lambda^{5(a)} - i\Sigma\gamma_5 - i\gamma_5\Sigma$ mentre l' utilizzo dei diagrammi del secondo tipo danno il termine $2mi\Lambda^{5(b)}$ che con quello sopra va a completare il termine $2mi\Lambda^5$ delle usuali Ward identities ¹¹ ma oltre a tale termine si aggiunge nello spazio degli impulsi un ulteriore termine anomalo della forma I.82. Allora le usuali Ward identities sono errate e in realtà esse sono della forma

$$(p+q)_\mu \Gamma_\mu^5(p, q) = 2mi\Gamma_\mu(p, q) + iS_F^{-1}(p)\gamma_5 + i\gamma_5 S_F^{-1}(q) + \text{termine anomalo} \quad (\text{I.83})$$

Come può essere scritto questo termine anomalo? Ovviamente esso è dato, nello spazio degli impulsi dal loop $T_{\mu\rho\sigma}$ saturato sui fotoni uscenti e sui propagatori fermionici esterni ossia è della forma

$$\begin{aligned}
&\text{Diagramma triangolo con linee esterne } A_\rho, A_\sigma \text{ e } A_q, \text{ e vertice } \gamma_\mu \gamma_5 \\
&= S_F(p) A_\rho(p) T_{\mu\rho\sigma}(p, q) A_\sigma(q) S_F(-q) = \\
&= -S_F(p) A_\rho(p) T_{\mu\rho\sigma}(p, q) A_\sigma(q) S_F(q) \quad (\text{I.84})
\end{aligned}$$

¹¹ A noi il contributo del diagramma triangolo a $2mi\Lambda^{5(b)}$ non è venuto essendo partiti sin dal principio nel limite di massa nulla.

e quindi le Ward identities anomale risultano

$$\begin{aligned}
 (p+q)_\mu \Gamma_\mu^5(p, q) &= 2mi\Gamma_\mu(p, q) + iS_F^{-1}(p)\gamma_5 + i\gamma_5 S_F^{-1}(q) - iA_\rho(p)A_\sigma(q)T_{\mu\rho\sigma} = \\
 &= 2mi\Gamma_\mu(p, q) + iS_F^{-1}(p)\gamma_5 + i\gamma_5 S_F^{-1}(q) - \frac{e^2}{4\pi^2}\epsilon_{\rho\sigma\mu\nu}p_\mu q_\nu A_\rho(p)A_\sigma(q).
 \end{aligned}
 \tag{I.85}$$

Ricordiamo che le I.58 si ricavano dall' espressione della divergenza di j_μ^5 . È ovvio allora pensare che tale termine anomalo provenga, nello spazio delle coordinate, proprio dal fatto che la divergenza di j_μ^5 non è solo $-2m\gamma_5$ ma qualcos' altro. Mostriamo che una divergenza anomala di j_μ^5 della forma I.49 da proprio un termine uguale a quello anomalo contenuto nella I.85. Ricordando l' espressione di $F_{\mu\nu}$ e del suo duale si ha che

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu j_\mu^5(z) &= -2m\gamma_5 - \frac{i}{16\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}(z)F_{\rho\sigma}(z) \\
 &= -2m\gamma_5 - \frac{i}{16\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\mu A_\nu(z) - \partial_\nu A_\mu(z))(\partial_\rho A_\sigma(z) - \partial_\sigma A_\rho(z))
 \end{aligned}$$

e scritto $A_\mu(z)$ nello spazio degli impulsi come

$$A_\mu(z) = \int d^4p e^{-ipz} A_\mu(p) \tag{I.86}$$

si ha che il termine trattato classicamente nella I.57 $\lim_{z \rightarrow 0} \langle 0 | \bar{\psi}(x) \partial_\mu j_\mu^5(z) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle$ viene ora riscritto come

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow 0} \langle 0 | \bar{\psi}(x) \partial_\mu j_\mu^5(z) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= -2m \int d^4p d^4q e^{-ipx-iqy} \Gamma^5(p, q) - \\
 &\quad - \lim_{z \rightarrow 0} \frac{i}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int d^4p d^4q e^{-ipx-iqy} (\partial_\mu e^{-ipz} A_\nu(p) - \partial_\nu e^{-ipz} A_\mu(p)) \cdot \\
 &\quad \cdot (\partial_\rho e^{-iqz} A_\sigma(q) - \partial_\sigma e^{-iqz} A_\rho(q))
 \end{aligned}$$

e tralasciando il primo termine che porta all' usuale termine di massa della I.58 e detto con $K(p, q)$ il termine aggiuntivo si ha che

$$\begin{aligned}
 K(p, q) &= - \lim_{z \rightarrow 0} \frac{i}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int d^4p d^4q e^{-ipx-iqy} e^{-ipz-iqz} (-ip_\mu A_\nu(p) + ip_\nu A_\mu(p)) \cdot \\
 &\quad \cdot (-iq_\rho A_\sigma(q) + iq_\sigma A_\rho(q)) = \\
 &= \frac{i}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int d^4p d^4q e^{-ipx-iqy} (p_\mu A_\nu(p) - p_\nu A_\mu(p)) (q_\rho A_\sigma(q) - q_\sigma A_\rho(q)) = \\
 &= \frac{i}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int d^4p d^4q e^{-ipx-iqy} (2p_\mu A_\nu(p) \cdot 2q_\rho A_\sigma(q)) = \\
 &= \frac{i}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int d^4p d^4q e^{-ipx-iqy} p_\mu q_\rho A_\nu(p) A_\sigma(q) = \\
 &= - \frac{i}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int d^4p d^4q e^{-ipx-iqy} p_\mu q_\nu A_\rho(p) A_\sigma(q) = \\
 &= - \frac{i}{4\pi^2} \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} \int d^4p d^4q e^{-ipx-iqy} p_\mu q_\nu A_\rho(p) A_\sigma(q)
 \end{aligned}$$

e dunque

$$-i(p+q)_\mu \Gamma_\mu^5 = \dots - \frac{i}{4\pi^4} \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} p_\mu q_\nu A_\rho(p) A_\sigma(q) \quad (\text{I.87})$$

che corrisponde esattamente al termine ottenuto con il calcolo esplicito del diagramma triangolo.

Dunque l' anomalia dovuta alla non invarianza dell' elemento di misura dell integrale di percorso è l' anomalia dovuta al diagramma a triangolo con due fotoni uscenti dal loop nelle identità di Ward.

Bibliografia

- [1] Stephen L. Adler, Phys. Rev. 177 2426(1969)
- [2] J.S. Bell & R. Jackiw, Nuovo Cimento 60A 47(1969)
- [3] ??? Fujikawa, Phy. Rev. Lett., 42 1195(1979)
- [4] ??? ???, ??????
- [5] Stefan Pokorski, *Gauge Field Theories*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS pag.254
- [6] ??? ???, ??????
- [7] Pierre Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, ADDISON-WESLEY, INC